

Лекция 5

Кристаллографические проекции

Для решения многих кристаллографических задач, таких как определение взаимных ориентаций плоскостей и направлений, индентирование рентгенограмм, определение текстур и других используют кристаллографические проекции, представляющие собой графическое изображение кристаллов и кристаллической решетки.

Метод кристаллографических проекций основан на одной из характерных особенностей кристаллов, заключающийся в том, что *углы между соответственными гранями (ребрами) всегда постоянны (закон постоянства углов)*. Поэтому форму кристаллического многогранника, расположение его элементов симметрии, анизотропию свойств можно характеризовать набором углов между гранями.

Если все грани кристалла путем параллельного переноса свести в одну точку, то получим *планарный* комплекс. Но в кристаллографии чаще пользуются углами между нормальными к граням; именно эти углы определяются по гониометрическим* измерениям и рентгенограммам. Совокупность полупрямых, перпендикулярных граням кристалла и проходящих через одну точку, называется *полярным* комплексом (рис. 1).

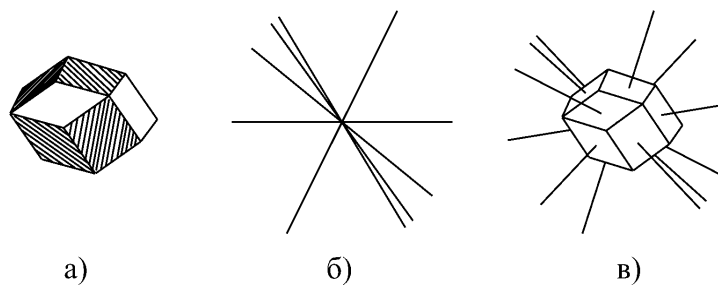


Рис. 1. Кристаллический многогранник:

а) ромбический додекаэдр; б) его полярный комплекс; в) нормали к его граням

Если грань расположена так, что нормаль к ней не проходит через центр комплекса, то нормаль (или грань) следует перенести параллельно самой себе. При этом соотношения не нарушаются.

*Гониметрия (греч.) – угол

Сферическая проекция

Представим себе кристалл, расположенный таким образом, что его центр совпадает с центром сферы большего размера, которую называют сферой проекций.

Совокупность точек пересечения нормалей полярного комплекса с поверхностью сферы образует *сферическую проекцию* (рис. 2).

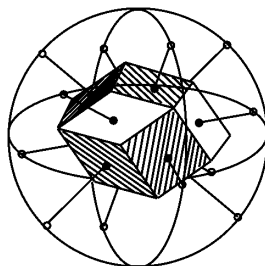


Рис. 2. Построение сферической проекции ромбододекаэдра

Полученные точки на сфере проекций называют полюсами грани. Положение каждой из таких точек однозначно определяется их сферическими координатами: широтой ρ и долготой φ (рис. 3). Сферическая проекция подобна глобусу, изображающему земной шар. Определим на ней по аналогии с глобусом северный и южный полюсы. Пусть это будут точки N и S соответственно. Экваториальная плоскость проходит через центр сферы перпендикулярно линии NS и пересекает сферу по большому кругу, называемому экватором. На поверхность сферы наносится сеть вспомогательных меридианов и параллелей. Пользуясь такой сетью, для каждой точки на сфере находим две координаты.

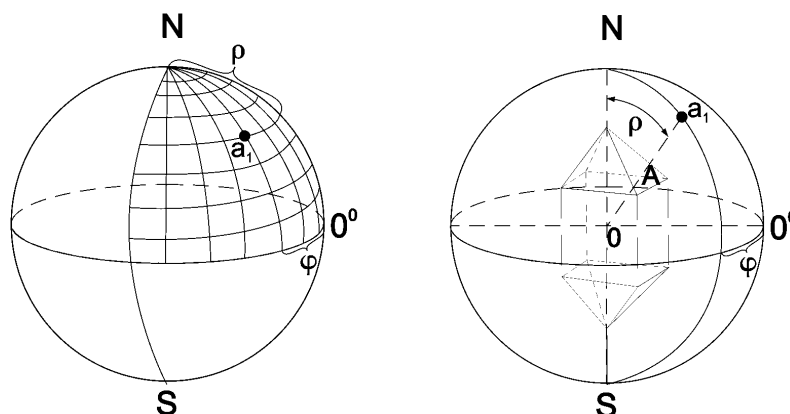


Рис. 3. Сферические координаты φ и ρ грани A

Для измерения φ один меридианов на сфере принимаем за нулевой. Долготу φ определяет угол между плоскостями нулевого меридиана и меридиана, проходящего через заданную точку. Измеряется числом градусов, отсчитываемых по экватору (рис.3).

Вторая координата ρ , называемая полярным расстоянием и соответствует угловому расстоянию (числу градусов), заключенному между полюсом сферы и заданной точкой. Отсчитывается по меридиану, проходящему через полюс, и упомянутую точку (рис.3). Относительно географической широты полярное расстояние является дополнительным углом до 90° .

Если известны φ и ρ двух граней, то можно вычислить углы между ними. Расстояние же грани от центра кристалла сферические координаты не характеризуют.

Сферическая проекция кристалла достаточно наглядна, но объемна. Для практического применения ее следует спроектировать на плоскость и пользоваться стереографическими, гномостереографическими и гномоническими проекциями.

Стереографическая проекция

За плоскость стереографической проекции Q принимается экваториальная плоскость, на которую сфера проецируется в виде круга проекций (рис.4). В результате пересечения сферической поверхности с Q имеем большой круг, отвечающий экватору сферы проекций и представляющий круг проекций.

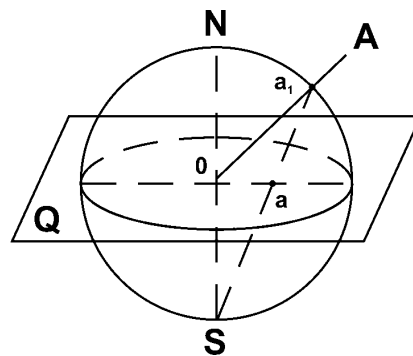


Рис. 4. Построение стереографической проекции a направления OA

Вертикальный диаметр шара NS , перпендикулярный к Q , называется *осью проекций*. Такая ось пересекает сферу проекций в двух точках N и S . Одна из этих точек (южный полюс S) является точкой зрения (“глазной точкой”).

Рассмотрим построение стереографической проекции некоторого направления OA (рис.4). Для этого продолжим данное направление до пересечения со сферой проекций (точка a_1). Соединим точку a_1 с точкой зрения S лучом зрения Sa_1 .

Точка a – точка пересечения Sa_1 с плоскостью Q является стереографической проекцией направления OA . Если направление пересекает сферу проекций в ее нижней части, то за глазную точку принимается N (северный полюс).

Таким образом, стереографические проекции направлений изображаются точками.

Вертикальное направление проецируется как точка в центре круга проекций (рис.5), горизонтальное – как две точки на экваторе, наклонное – как точка внутри круга проекций.

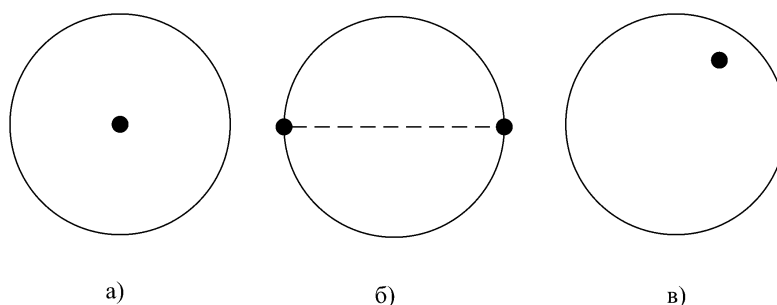


Рис. 5. Стереографические проекции направлений, расположенных относительно плоскости проекции: а) перпендикулярно; б) в самой плоскости; в) под косым углом к ней.

Построение стереографической проекции плоскости R производится следующим образом (рис. б). Предварительно перенеся R параллельно самой себе в центр проекций, продолжаем ее до пересечения со сферой проекций. Проектируемая плоскость пересекает верхнюю часть сферы по дуге $a_1v_1d_1$. Каждую точку этой дуги соединяем лучом зрения с точкой S . Лучи зрения Sa_1 , Sv_1 и Sd_1 пересекут плоскость проекций по дуге abd .

Существует **теорема**, согласно которой стереографической проекцией плоскости является дуга окружности.

При этом концы дуги опираются на концы одного из диаметров основного круга проекций. Обычно проектируется только верхняя часть плоскости, лежащая над плоскостью проекций. При проектировании нижней части плоскости за глазную точку принимается точка N .

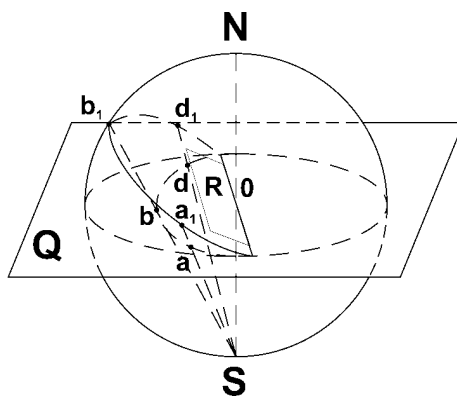


Рис. 6. Построение стереографической проекции abd плоскости R

Стереографические проекции горизонтальных плоскостей (рис.7) представляют собой окружности, совпадающие с границами круга проекций; проекции вертикальных плоскостей совпадают с диаметрами круга проекций, а проекции наклонных плоскостей изображаются дугами, опирающимися на концы диаметра круга проекций.

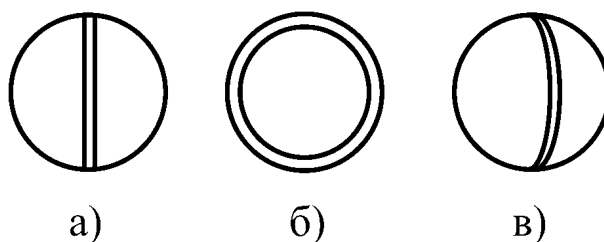


Рис. 7. Стереографические проекции плоскостей, расположенных относительно плоскости проекции: а) перпендикулярно; б) в самой плоскости; в) под косым углом к ней.

Важная роль, которую играют стереографические проекции в кристаллографии, определяется тем, что на ней сохраняются угловые соотношения, т. е. углы на сфере проекций проектируются на стереографическую проекцию без искажений. Кроме того, все круги (как большие, так и малые) на поверхности сферы проекции проектируются в виде кругов и на стереографической проекции.

Стереографические проекции просты и наглядны. Используются они, главным образом, для отображения симметрии кристалла (как внешней формы, так и физических свойств). При этом используются обозначения, представленные в табл.1.

Все точки стереографической проекции связаны взаимно однозначным соответствием с точками поверхности сферы. Поэтому каждая точка

стереографической проекции может быть охарактеризована сферическими координатами φ и ρ . Для быстрого и удобного определения сферических координат точек стереографической проекции используются специальные шаблоны, называемые градусными сетками.

Таблица 1

Элементы симметрии конечных фигур и их обозначения на стереографической проекции

Название	Обозначение		Изображение по отношению к плоскости чертежа	
	международный символ	по формуле симметрии	перпендикулярное	параллельное
Плоскость симметрии	m	P		
Центр симметрии	$\bar{1}$	C	C	\bullet \circ
Поворотная ось симметрии:	n	L_n		
двойная	2	L_2		
тройная	3	L_3		
четверная	4	L_4		
шестерная	6	L_6		
Инверсионная ось симметрии:	\bar{n}	$L_{\bar{n}} = L_n i$		
тройная	$\bar{3}$	$L_{\bar{3}} = L_3 i$		
четверная	$\bar{4}$	$L_{\bar{4}} = L_4 i$		
шестерная	$\bar{6}$	$L_{\bar{6}} = L_6 i$		

Рассмотрим построение стандартной стереографической проекции элементов симметрии кубического кристалла (ось симметрии L_4 перпендикулярна плоскости проекций). Его формула симметрии $3L_4 4L_3 6L_2 9PC (m\bar{3}m)$.

Плоскости и оси симметрии куба и их стереографические проекции показаны на рис.8 и рис.9.

На рис.10 представлена стандартная стереографическая проекция элементов симметрии куба.

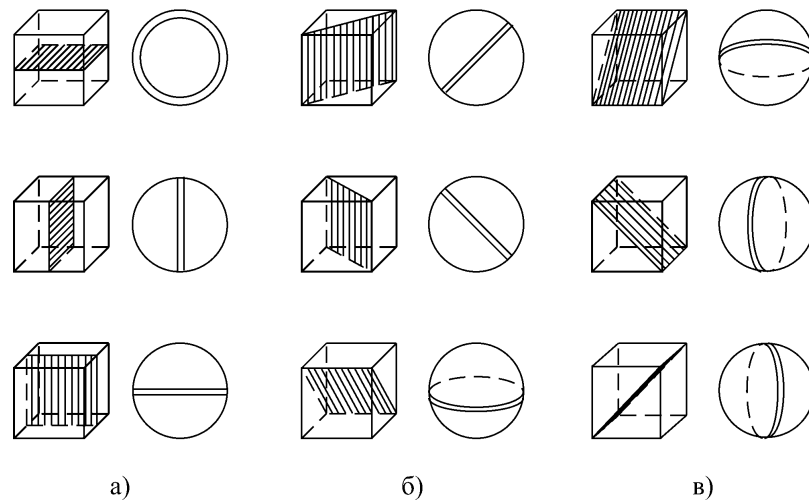


Рис. 8. Плоскости симметрии куба и их стереографические проекции:
 а) три координатные плоскости симметрии; б), в) шесть диагональных плоскостей симметрии. Три оси 4-го порядка $L_4(4)$ проходят через центры противоположных граней, четыре оси 3-го порядка $L_3(3)$ - пространственные диагонали куба, шесть осей 2-го порядка $L_2(2)$ проходят через середины пар противоположных ребер (рис.9).

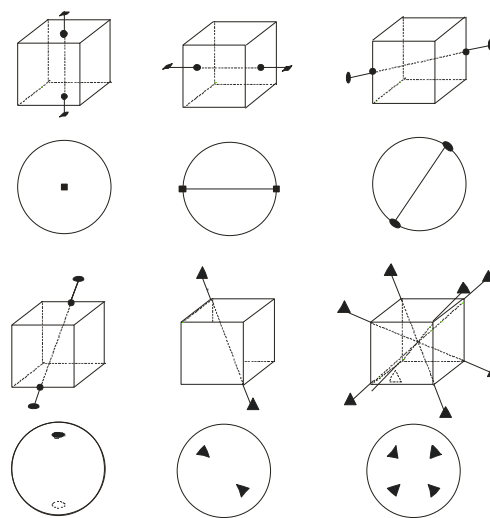


Рис. 9. Некоторые из осей симметрии куба и их стереографические проекции

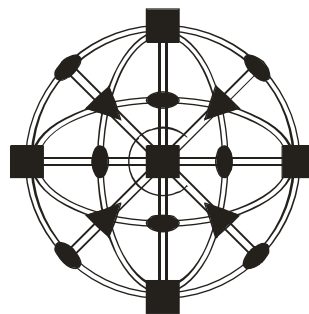


Рис. 10. Стандартная стереографическая проекция элементов симметрии куба (ось симметрии L_4 перпендикулярна плоскости проекции)

Гномостереографическая проекция

Эта проекция чаще всего применяется для изображения кристаллических многогранников. При этом проецируется не многогранник, а его полярный комплекс.

Плоскостью гномостереографической проекции, как и стереографической, служит экваториальная плоскость сферы проекций. Гномостереографическая проекция кристалла представляет собой совокупность стереографических проекций нормалей к граням кристалла.

Пусть задан некоторый кристаллический многогранник. Примем какую-либо точку O внутри него, например центр тяжести, за центр проекций (рис.11). Из этой точки произвольным радиусом опишем сферическую поверхность – шар проекций. Через центр проведем горизонтальную плоскость проекций Q и условимся весь чертеж изображать на ней.

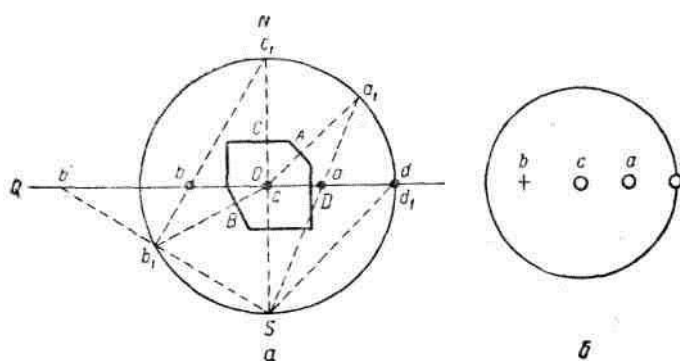


Рис. 11. Построение гномостереографической проекции кристалла (а) и изображение проекций граней A , B , C и D на плоскости Q

Опустим из центра O на все грани кристалла перпендикуляры и продолжим их до пересечения с поверхностью сферы. В результате пересечений на сферической поверхности возникнет ряд точек. Например, на рис.11, a нормаль к грани A дает на шаровой поверхности точку a_1 .

Все найденные точки следует перенести на горизонтальную плоскость проекций Q . С этой целью южный полюс шара S принимаем за точку зрения и соединяем с ней лучами зрения точки, расположенные на сфере.

В результате пересечения лучей зрения с плоскостью чертежа; получим новые точки, отвечающие стереографическим проекциям нормалей к граням. Таким

образом, грани на данной проекции изображаются точками (точка a – стереографическая проекция нормали к грани A (рис.11)).

Нормали к граням, пересекающие шар проекций в верхней полусфере, проектируются внутри круга проекций (например, нормаль OA на рис.11). Наоборот, нормали, пересекающие шар проекций в нижней полусфере, проектируются вне этого круга (например, нормаль OB на рис.11). Явное неудобство последнего построения заставляет переносить для таких нормалей точку зрения S в северный полюс сферы N . В этом случае и проекции нижних граней окажутся внутри круга проекций.

Чтобы, отличить друг от друга проекции нормалей к верхним и нижним граням, первые обозначаются кружками, а вторые – крестиками.

Необходимо запомнить следующее: *горизонтальные грани проектируются в центре круга проекций* (например, грань C , рис.11); *вертикальные грани проектируются на самом круге проекций* (например, грань D); *косые грани проектируются внутри круга проекций* (например, грани A и B).

Чем круче наклон грани (т. е. чем меньше угол между гранью и осью проекций), тем ближе проектирующая ее точка располагается к кругу проекций. Наоборот, чем положе грань (т. е. чем больше указанный угол), тем ближе соответственная точка к центру круга.

Гномоническая проекция

В гномонических проекциях так же, как в гномостереографических, вместо плоскости проектируется перпендикулярная к ней линия, вместо прямой – перпендикулярная к ней плоскость.

Плоскость гномонической проекции параллельна плоскости стереографической и гномостереографической проекций, но она не экваториальная, а касательная к северному полюсу сферы проекций (рис.12). Нормаль к грани кристалла, проведенная из центра сферы проекций, продолжается до пересечения с плоскостью проекций.

Гномоническая проекция плоскости представляет собой точку, проекция направления – прямую.

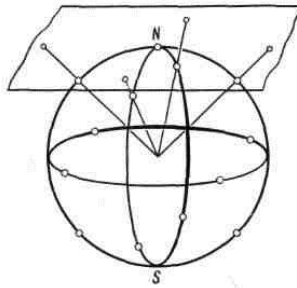


Рис. 12. Построение гномонической проекции

Между прямой (кристаллической) и обратной решетками существует тесная связь, вытекающая из полярности обратной решетки, когда одно пространство – кристаллическое – преобразуется в другое – в пространство обратной решетки.

Подобно тому, как в кристаллическом пространстве узлы образуют ряды, так и в пространстве обратной решетки ее узлы могут быть сведены в прямые.

По существу гномоническая проекция кристалла является линейной проекцией узлов обратной решетки на выбранную плоскость проекций.

Недостатком гномонической проекции является то, что в ней не сохранены угловые соотношения. Большим преимуществом этой проекции является то, что координаты точек прямо пропорциональны индексам Миллера. Числа h/k и k/l получаются на гномонической проекции непосредственно как координаты отдельных точек проекции. Этот важный результат дает возможность определять символы граней непосредственно на гномонической проекции.

Соотношения между различными проекциями

Принцип построения стереографической и гномостереографической проекций одинаков; различие заключается в том, что стереографическая проекция строится по комплексу граней кристалла (планарному комплексу), гномостереографическая – по полярному комплексу.

Соотношения между всеми вышеописанными типами проекций показаны на рис. 13

Проекция направления OM дает на сферической проекции точку M , на гномонической проекции (плоскость Q) – точку M'' . На гномостереографической

проекции (плоскость P) точка M' – это проекция плоскости, перпендикулярной направлению OM . Угловые соотношения можно найти по рис.13.

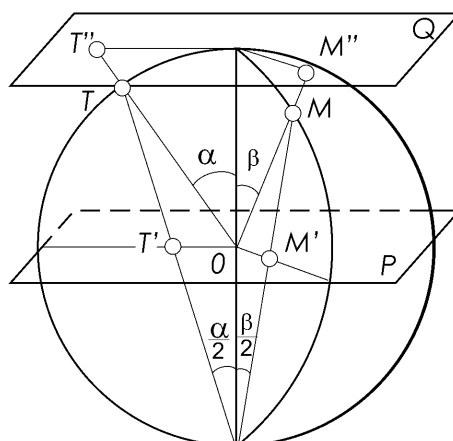


Рис. 13. Соотношения между различными кристаллографическими проекциями