

Московский институт электронной техники
(Технический университет)

Теоретическая и прикладная механика

(конспект лекций)

Москва 2010 г

ПРЕДИСЛОВИЕ

Конспект лекций по курсу "Теоретическая и прикладная механика" (ТиПМ) составлен в соответствии с учебной программой для технических специальностей и направлений подготовки в МИЭТ. Курс ТиПМ – фундаментальная дисциплина в системе подготовки инженеров и бакалавров. Он является завершающим в группе основополагающих дисциплин (математика, физика, управление, информатика) и связующим со специальными дисциплинами.

Для удобства изучения материал разделен на три раздела: "Теоретическая механика", "Прикладная механика" и "Детали машин".

Материал в пособии изложен в последовательности, соответствующей порядку решения задач при проектировании механических устройств. В первом разделе (лекции 1-8) изложены теоретические основы статики, кинематики и динамики. Во втором разделе (лекции 9-16) изложены основные сведения, необходимые для расчетов на прочность и жесткость типовых элементов приборов, устройств и оборудования. В третьем разделе (лекции 17-24) изложены сведения по расчету и проектированию типовых элементов и узлов миниатюрных механических устройств.

Конспект лекций написан коллективом преподавателей кафедры технической механики: доц. Аккуловым Р.И., проф. Гребенкиным В.З., доц. Дегтяревым А.А., проф. Кузнецовым О.А., доц. Летягиным В.А., проф. Погаловым А.И., ст. преподавателем Сахаровым Е.А., проф. Тимофеевым В.Н., доц. Угольниковым С.В.

Лекция 1. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ И УСЛОВИЯ ЕЕ РАВНОВЕСИЯ

1.1. Основные понятия

Механика - искусство построения машин. Она изучает механическое движение материальных тел и взаимодействие между ними в рамках классической механики, в основе которой лежат законы И.Ньютона (скорости тел пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света). Различают механику точки и системы материальных точек, механику твердого тела, механику сплошной среды. Основными разделами механики являются статика, кинематика и динамика.

Сопротивление материалов - раздел механики сплошной среды, изучающий законы прочности и жесткости типовых элементов конструкций. Законы сопротивления материалов используют при расчетах машин и механизмов при различных видах воздействий. В основе этих законов лежат законы теоретической механики (механики).

Основные понятия механики - твердое тело, материальная точка, система отсчета, состояние равновесия, сила, система сил.

В механике при изучении законов равновесия использует понятие *абсолютно твердого тела* (т.е. недеформируемого) - такого тела, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным. Это понятие применимо и к большинству деформируемых тел, поскольку их деформации даже в условиях интенсивных воздействий, близких к разрушающим, пренебрежимо малы по сравнению с размерами самих тел.

Материальная точка - тело, размеры которого по всем направлениям настолько малы, что различием в движении отдельных точек этого тела можно пренебречь.

Система отсчета - система координат, неизменно связанная с каким-нибудь физическим телом, относительно которого рассматривается движение изучаемого тела или системы тел. В классической механике используется инерциальная система отсчета, в которой справедливы законы Ньютона.

Состояние равновесия - состояние покоя или поступательного равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Сила - мера механического взаимодействия тел. Различают силы тяжести, давления газа, притяжения или отталкивания наэлектризованных тел. Сила - векторная величина, характеризуемая точкой приложения, направлением и модулем. Она имеет линию действия. Обозначения векторов принято выделять в тексте жирным шрифтом.

Различают силы внешние и внутренние, активные и реактивные, сосредоточенные и распределенные (рис.1.1).

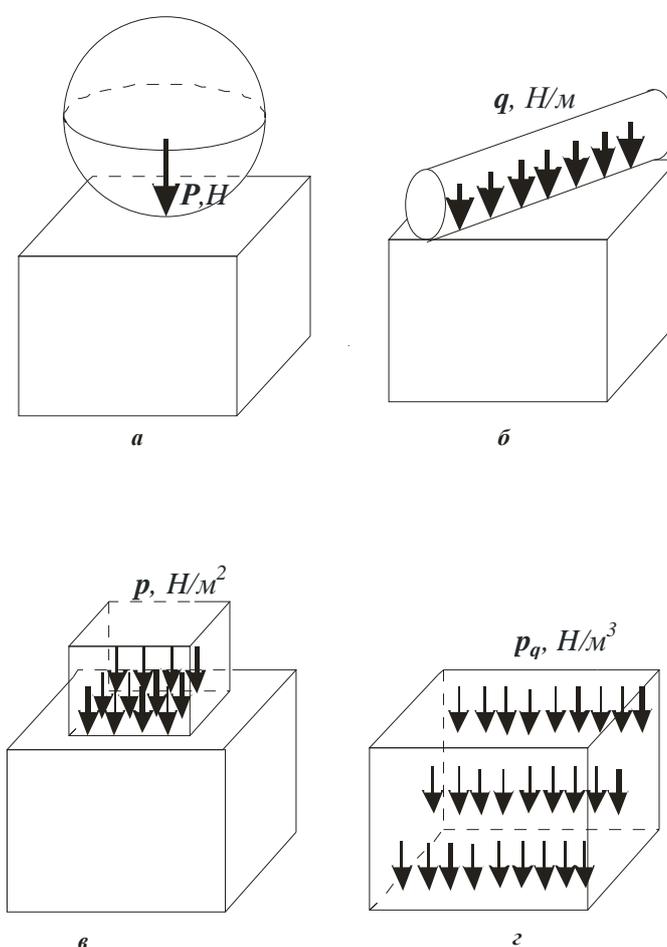


Рис.1.1 Характер действия сил на тело: а – сосредоточенная сила; б – распределенная вдоль линии сила; в – распределенная по поверхности сила; г – распределенная по объему сила

Внешние силы приложены на границе рассматриваемого тела и характеризуют меру его взаимодействия с окружающими телами. Внутренние силы действуют внутри тела между отдельными его частями.

Активные силы возбуждаются внешними источниками и телами. Реактивные силы возникают под действием активных сил в связях, ограничивающих перемещения тел.

Сосредоточенные силы приложены в отдельных точках. Поверхность контакта тел пренебрежимо мала по сравнению с поверхностью контактирующих тел. Распределенные силы приложены либо вдоль линии контакта, соизмеримой с размерами контактирующих тел, либо по поверхности контакта, соизмеримой с поверхностью тела (сила давления газа на тело), либо по всему объему тела.

Система сил - совокупность сил, приложенных к телу. Система сил, под действием которой тело находится в состоянии равновесия, называется уравнивающейся системой сил. Одна из сил уравнивающейся системы сил называется уравнивающейся. Системы сил, оказывающие одинаковое действие на одно и то же тело, называется эквивалентными.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется равнодействующей.

1.2. Аксиомы статики

Аксиомы статики отражают опытные данные, наблюдающиеся при действии сил на абсолютно твердые тела.

Аксиома 1. Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей точки их приложения, в противоположные стороны.

Аксиома 2. Состояние тела под действием данной системы сил не изменится, если к ней добавить или отнять две уравнивающиеся силы.

Если к данной системе сил P_1, P_2, \dots, P_n добавить две уравнивающиеся силы P и P' , тогда $(P_1, P_2, \dots, P_n) \equiv (P, P', P_1, P_2, \dots, P_n)$

Следствие 1. Силу можно переносить вдоль линии ее действия в пределах абсолютно твердого тела, не изменяя его состояния.

К действующей силе P (рис.1.2) добавлены уравновешивающиеся силы P_1 и P_2 , причем $|P|=|P_1|=|P_2|$. Поскольку $(P, P_1, P_2)=P$ и $(P_1, P, P_2)=P_1$, то $P \equiv P_1$.

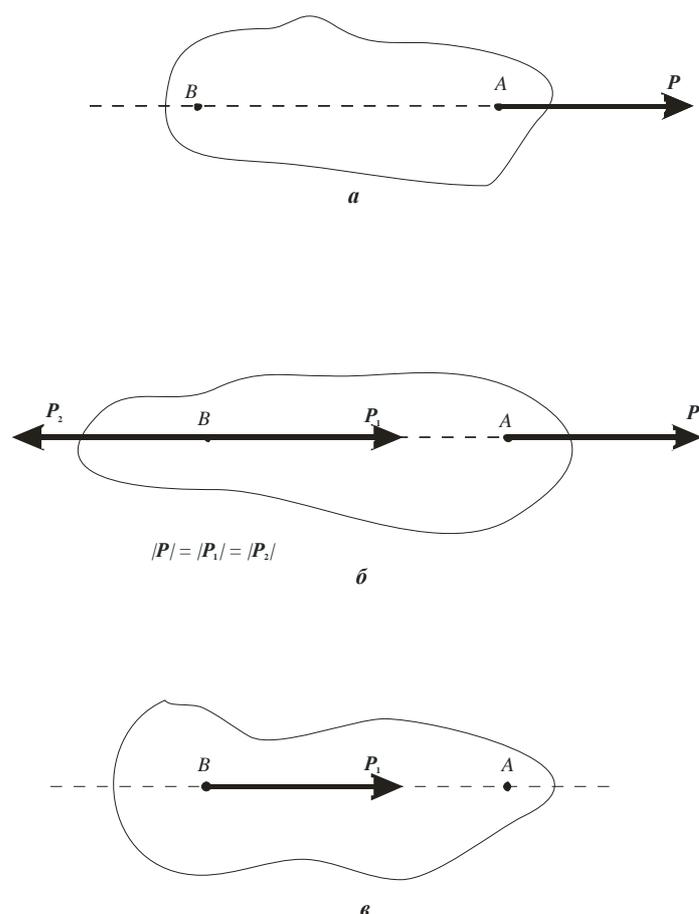


Рис.1.2 Перенос силы вдоль линии действия: а – исходное состояние тела; б – тело догружено двумя уравновешивающимися силами; в – сила перенесена вдоль линии действия

Следствие 2. Одна из сил уравновешивающейся системы сил, взятая в обратном направлении, является равнодействующей для всех остальных сил.

На тело (рис.1.3,а) действует уравновешивающаяся система сил (P_1, P_2, P_3, P_4) . Система (P_2, P_3, P_4) заменена силой $-P_1$. Поскольку силы P_1 и $-P_1$ являются взаимно уравновешивающимися (рис.1.3,б), то состояние равновесия не нарушилось. Отсюда следует эквивалентность систем $(P_2, P_3, \dots, P_4) \equiv -P_1$ (рис.1.3,в,г).

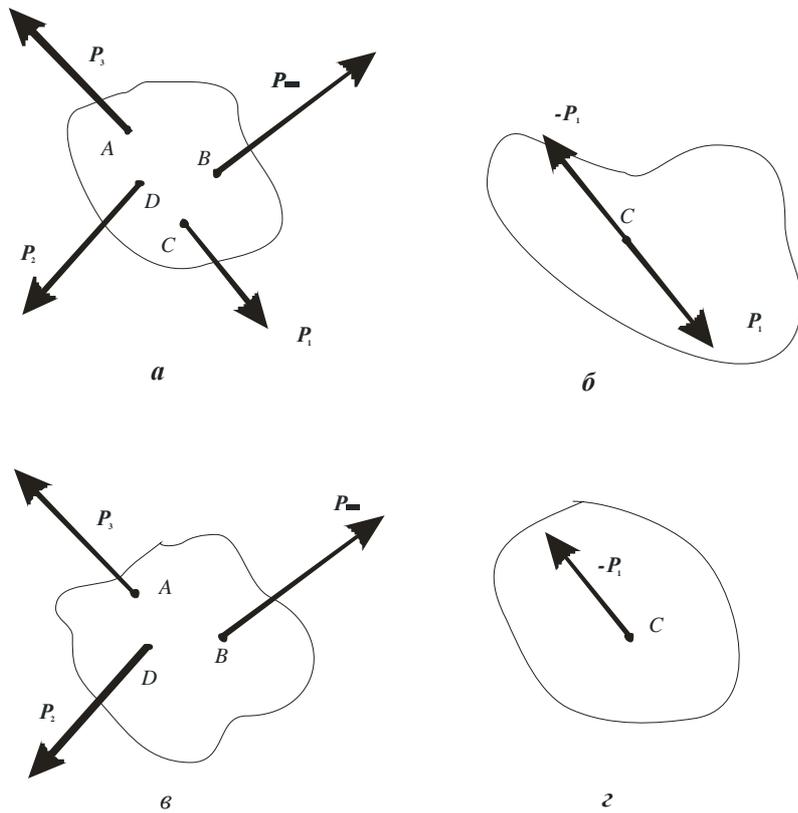


Рис.1.3 Равнодействующая уравновешивавшейся системы сил: а - исходная система сил; б - уравновешивающиеся силы; в - оставшиеся силы; г - равнодействующая сила

Аксиома 3. Равнодействующая двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу в одной точке, равна их геометрической сумме (рис.1.4): $R = P_1 + P_2$.

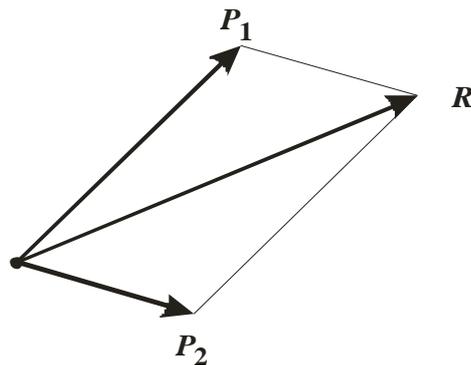


Рис.1.4 Геометрическое сложение сил

Аксиома 4. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис.1.5).

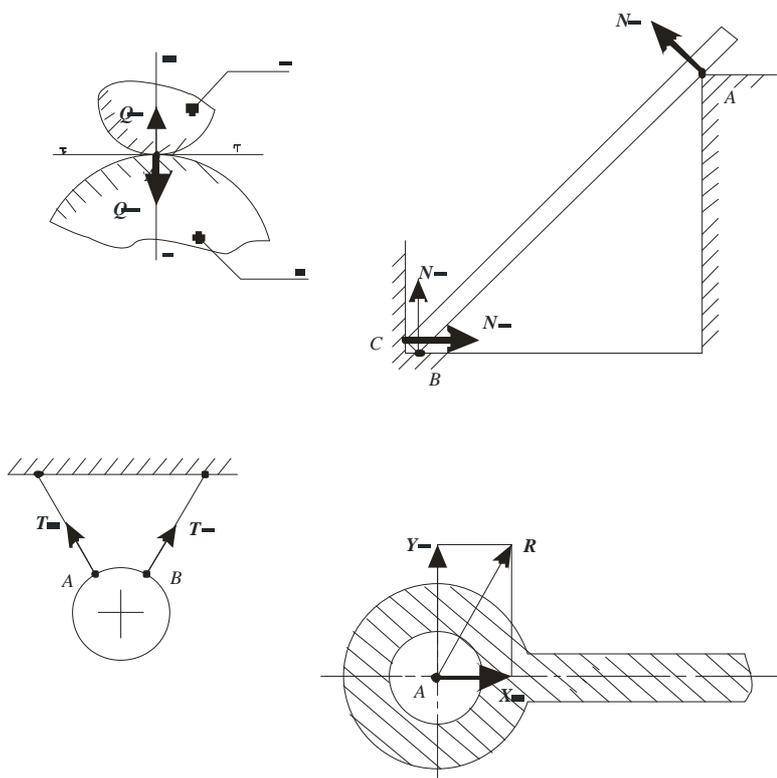


Рис.1.5 Силы взаимодействия тел, направление вдоль общей нормали к поверхности контакта

Линия действия сил является общей нормалью $n-n$ к поверхностям взаимодействующих тел в точке контакта

Аксиома 5. Если деформируемое тело, находящееся под действием данных сил в состоянии равновесия, станет абсолютно твердым (отвердеет), то его равновесие не нарушится.

1.3. Система сходящихся сил и условие ее равновесия

1.3.1. Сложение сил, приложенных в одной точке. Силовой многоугольник

Имеем силы P_1 и P_2 , приложенные в точке A ; угол между ними равен α . Равнодействующая этих сил R ; φ_1 – угол между R и P_1 , φ_2 – угол между R и P_2 (рис.1.6).

Решая треугольник ACD , получим:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180^\circ - \alpha) = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha;$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha};$$

$$\frac{P_1}{\sin \varphi_2} = \frac{P_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{P_2 \sin \alpha}{R}; \quad \sin \varphi_2 = \frac{P_1 \sin \alpha}{R}$$

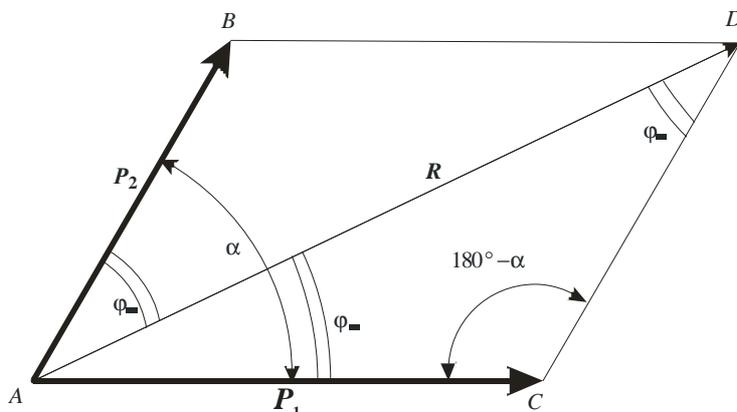


Рис.1.6 Равнодействующая R двух сил P_1 и P_2

Сложение двух сил можно выполнять так же по правилу треугольника (рис.1.7).

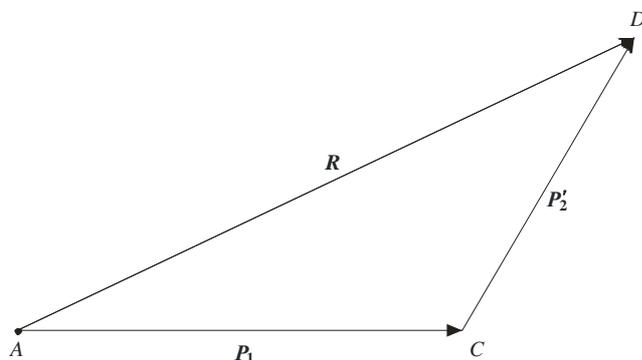


Рис.1.7 Сложение двух сил по правилу треугольника

По аналогии получают правило силового многоугольника, определяющего модуль и направление равнодействующей системы произвольных сил (рис.1.8).

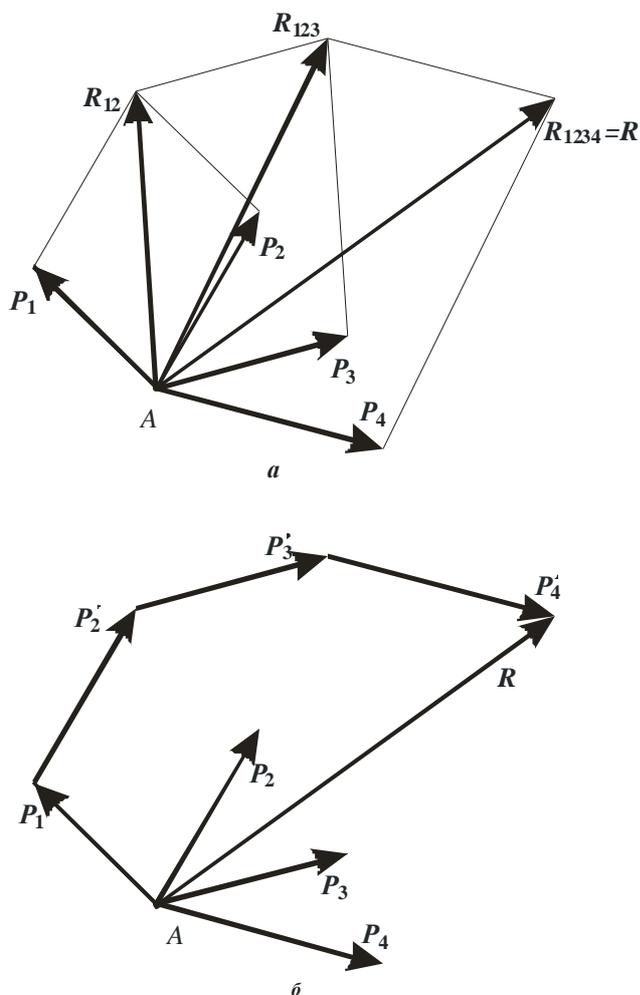


Рис.1.8 Сложение сил по правилу силового многоугольника: а – последовательное сложение двух сил; б – силовой многоугольник для системы сил P_1, P_2, P_3, P_4 (R – равнодействующая)

Сложение сил по правилу силового многоугольника называют геометрическим сложением этих сил. Это правило полностью совпадает с общим правилом сложения векторов:

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i$$

1.3.2. Разложение силы

Эта задача обратна задаче сложения сил. Наибольший интерес представляет разложение силы по координатным осям. В этой операции обычно используется правило параллелепипеда (рис.1.9):

$$P = P_x + P_y + P_z$$

Здесь P_x , P_y , P_z – составляющие вектора P по координатным осям. Не следует их путать с проекциями вектора. Проекция – скалярная величина, составляющая – величина векторная.

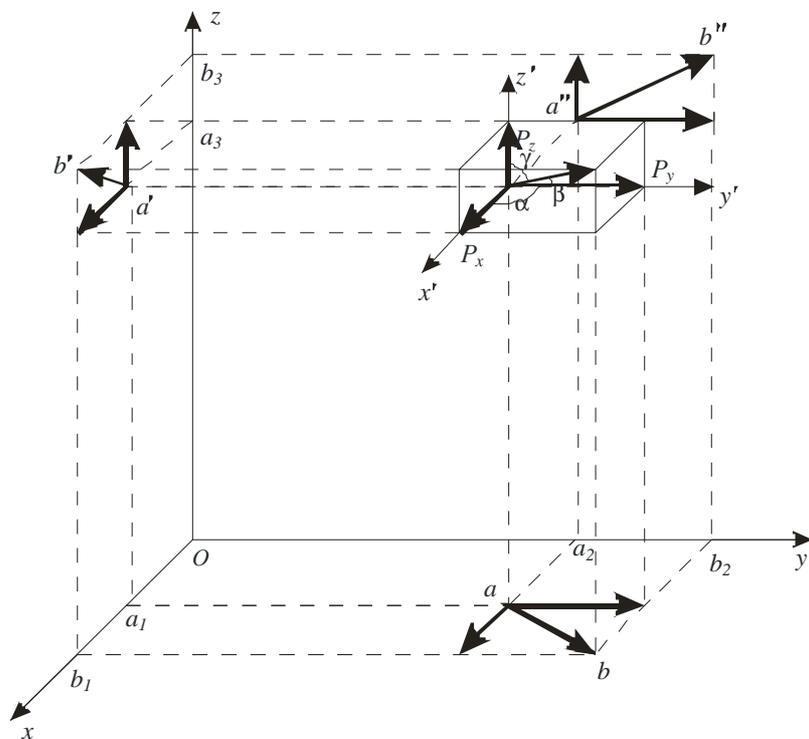


Рис.1.9 Разложение силы по координатным осям параллелепипеда

Составляющие выражаются через единичные векторы i, j, k :

$$P_x = P_x \cdot i; \quad P_y = P_y \cdot j; \quad P_z = P_z \cdot k; \quad P = P_x \cdot i + P_y \cdot j + P_z \cdot k,$$

где i, j, k - орты системы координат (рис.1.10); P_x, P_y, P_z - проекции вектора P на соответствующие координатные оси.

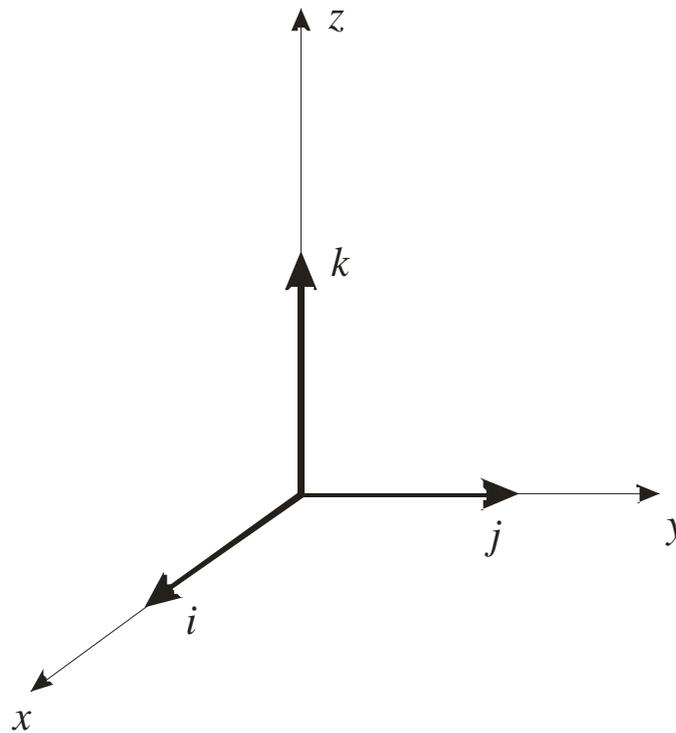


Рис.1.10

Каждая проекция равна произведению модуля вектора на косинус угла между этим вектором и положительным направлением оси проекций:

$$P_x = P \cdot \cos \alpha; \quad P_y = P \cdot \cos \beta; \quad P_z = P \cdot \cos \gamma.$$

1.3.3. Аналитический способ разложения силы

Каждая силы системы сил (P_1, P_2, \dots, P_n) имеет составляющие проекции по координатным осям $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2, \dots, X_n, Y_n, Z_n$. Равнодействующая системы сил R , ее проекции R_x, R_y, R_z и направляющие косинусы равны

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i; \quad R_y = \sum_{i=1}^n Y_i; \quad R_z = \sum_{i=1}^n Z_i;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2}.$$

$$R = R_x i + R_y j + R_z k = (\sum X_i) i + (\sum Y_i) j + (\sum Z_i) k.$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

1.3.4. Равновесие системы сходящихся сил

Уравновешенную систему из n сил $(P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n)$ представляем в виде двух систем сил: $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ и (P_n) . Равнодействующая R' системы сил $(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$ и сила P_n составляют систему из двух сил. Согласно аксиоме статики эта система находится в равновесии, если обе силы равны, противоположно направлены и лежат на одной прямой. Равнодействующая системы сил, находящейся в равновесии, равна нулю.

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы, был замкнутым: $R = 0$. Отсюда следует, что

$$(\sum X_i)^2 + (\sum Y_i)^2 + (\sum Z_i)^2 = 0; \quad \sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0; \quad \sum Z_i = 0.$$

Примеры к лекции 1

Пример 1.1. Определить равнодействующую двух сил $P_1 = 10$ Н и $P_2 = 25$ Н, приложенных в одной точке под углом $\alpha = 60^\circ$. Найти также углы φ_1 и φ_2 , образуемые равнодействующей с соответствующими силами (см. рис.1.6).

Решение. По теореме косинусов находим равнодействующую силу:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos(180^\circ - \alpha);$$
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha} = \sqrt{10^2 + 25^2 + 2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0.5} = 31,2 \text{ Н.}$$

По теореме синусов запишем

$$\frac{P_1}{\sin \varphi_2} = \frac{P_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \alpha};$$

Отсюда

$$\sin \varphi_1 = \frac{P_2}{R} \sin \alpha = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{31,2 \cdot 2} = 0,694; \quad \varphi_1 \cong 44^\circ;$$
$$\sin \varphi_2 = \frac{P_1}{R} \sin \alpha = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{31,2 \cdot 2} = 0,277; \quad \varphi_2 \cong 16^\circ.$$

Пример 1.2. Найти величину равнодействующей системы пяти сходящихся сил: $P_1 = 3$ Н, $P_2 = 5$ Н, $P_3 = 6$ Н, $P_4 = 7$ Н, $P_5 = 2$ Н (рис.1.11), если $\alpha = 38^\circ$.

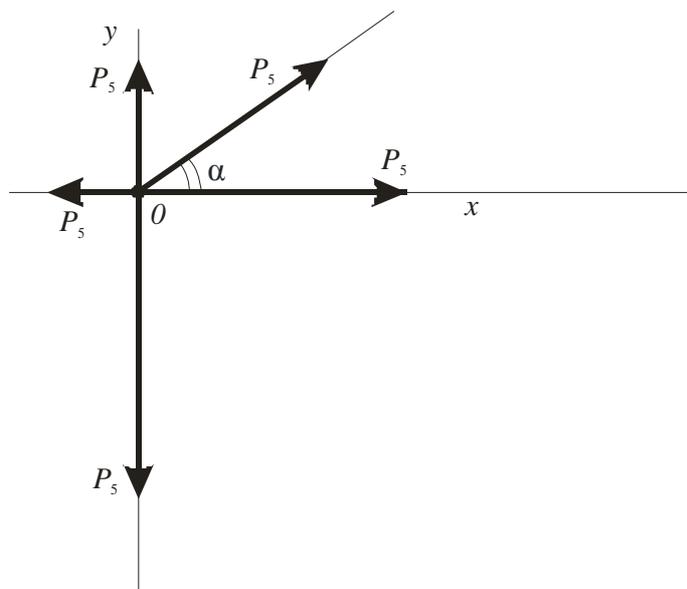


Рис.1.11

Решение. Определяем проекцию равнодействующей на оси x и y :

$$R_x = P_2 \cdot \cos \alpha + P_3 - P_5 \approx 5 \cdot 0,788 + 6 - 2 = 7,940 \text{ (Н)};$$

$$R_y = P_1 + P_2 \cdot \sin \alpha - P_4 \approx 3 + 5 \cdot 0,616 - 7 = -0,922 \text{ (Н)}.$$

Затем находим величину (модуль) равнодействующей силы:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{7,54^2 + (-0,46)^2} = 7,55 \text{ Н}.$$

Пример 1.3. К шарниру B кронштейна ABC (рис.1.12) приложены силы $P_1 = 20$ Н и $P_2 = 15$ Н. Определить усилия в стержнях AB и BC , пренебрегая весом стержней, если угол $\alpha = 30^\circ$.

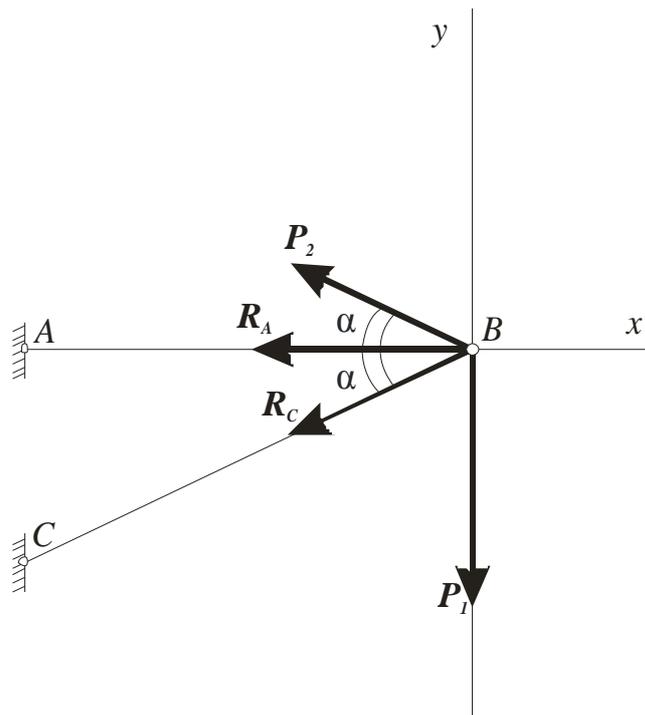


Рис.1.12 Кронштейн

Решение. Рассмотрим равновесие шарнира B . Действие связей-стержней на шарнир B заменяем реактивными силами R_A и R_C . Составляем уравнения равновесия в системе координат xBy :

$$\sum X = 0; \quad -R_A - P_2 \cos \alpha - R_C \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad P_2 \sin \alpha - R_C \sin \alpha - P_1 = 0.$$

Из второго уравнения находим $R_C = -25,00$ Н, из первого уравнения - $R_A = 8,67$ Н. Знаки в значениях сил R_A и R_C позволяют сделать следующий вывод: стержень AB сжат, а стержень BC растянут.

Лекция 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ И УСЛОВИЯ ЕЕ РАВНОВЕСИЯ

2.1. Сложение параллельных сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости, называется *плоской системой сил*. Система сил, линии действия которых параллельны, образует *систему параллельных сил*.

Процедура сложения двух параллельных сил P_1 и P_2 сводится к отысканию равнодействующей R и точки ее приложения C . Для этого выполняются последовательные построения, показанные на рис.2.1.

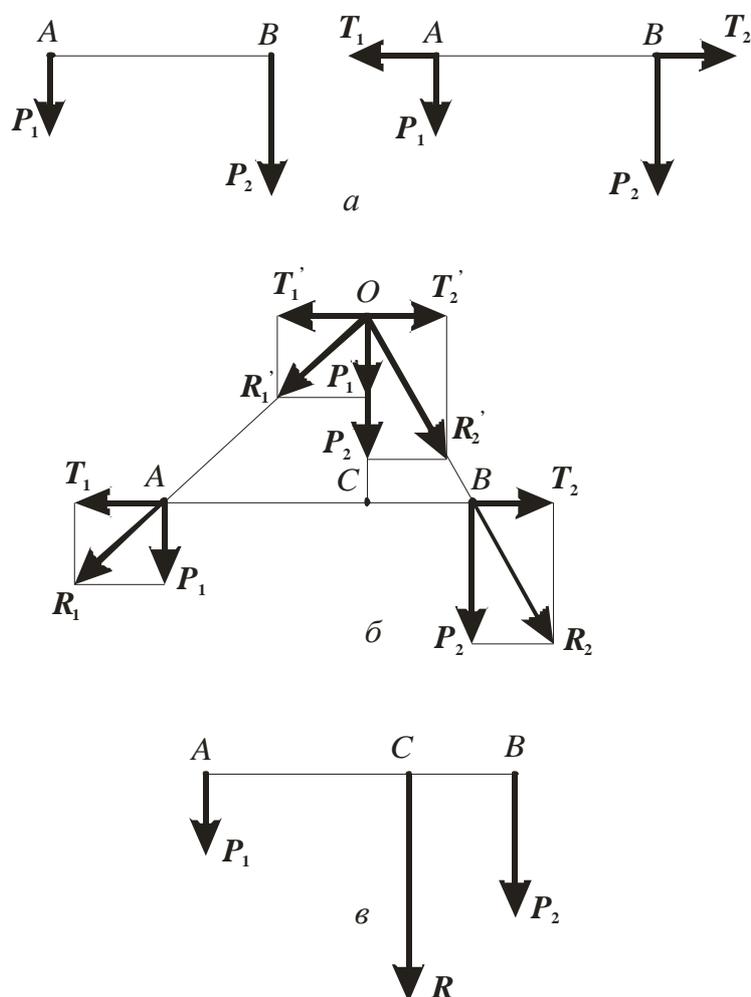


Рис. 2.1 Сложение параллельных сил: а – добавление к исходной системе двух равных сил; б – отыскание равнодействующей силы; в – система параллельных сил и ее равнодействующая

К заданным силам P_1 и P_2 добавляем силы T_1 и T_2 , равные по модулю и направленные в противоположные стороны по линии AB . Полученная система эквивалентна заданной. Далее находим равнодействующие R_1 и R_2 и точку O пересечения линий их действия. Переносим силы R_1 и R_2 в точку O и раскладываем их на составляющие P_1 и T_1 , P_2 и T_2 . Силы T_1 и T_2 взаимно уничтожаются. В результате в т. O остаются силы P_1 и P_2 , сумма которых является искомой равнодействующей

$$R = P_1 + P_2,$$

модуль которой $R = P_1 + P_2$.

Для определения положения точки C пересечения линии действия R с отрезком AB используем соотношения из подобия треугольников:

$$\frac{OC}{AC} = \frac{P_1}{T_1}; \quad \frac{OC}{CB} = \frac{P_2}{T_2};$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{P_2}{P_1}; \quad P_1 \cdot AC = P_2 \cdot CB; \quad \frac{AC}{P_2} = \frac{CB}{P_1} = \frac{AC + CB}{P_1 + P_2} = \frac{AB}{R},$$

откуда

$$AC = \frac{AB \cdot P_2}{R} = \frac{AB \cdot P_2}{P_1 + P_2}; \quad CB = \frac{AB \cdot P_1}{R} = \frac{AB \cdot P_1}{P_1 + P_2}.$$

К заданной системе антипараллельных сил $P_1 > P_2$ (рис.2.2) добавляем силу P_2' , равную P_2 и противоположно направленную.

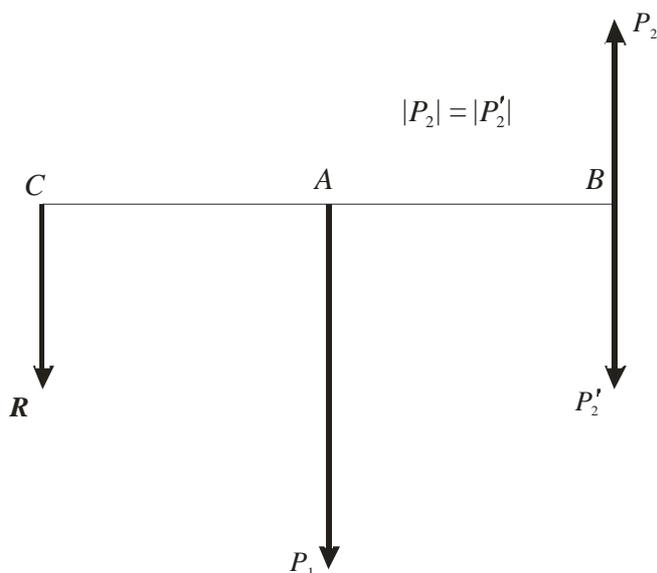


Рис. 2.2 Равнодействующая R антипараллельных сил P_1 и P_2

Рассматривая силу P_1 как равнодействующую параллельных сил P_2' и R , получаем следующие соотношения:

$$P_1 = P_2' + R = P_2 + R; \quad R = P_1 - P_2;$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2'}{R} = \frac{P_2}{R}; \quad AC = \frac{AB \cdot P_2}{R}; \quad \frac{AC + AB}{AC} = \frac{P_2 + R}{P_2}; \quad \frac{AC}{CB} = \frac{P_2}{P_1}; \quad P_1 \cdot AC = P_2 \cdot CB.$$

Парой сил называют систему двух антипараллельных и равных по модулю сил (рис.2.3), для которой

$$R = P_1 - P_2 = 0; \quad AC = \frac{AB \cdot P_2}{P_1 - P_2} = \infty.$$

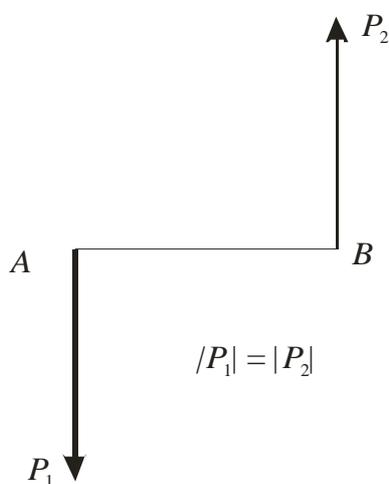


Рис.2.3 Пара сил ($P_1 = P_2 = P$)

Пара сил не имеет равнодействующей. Ее действие на твердое тело имеет вращательный эффект.

Для сложения системы параллельных сил (рис.2.4) последовательно используют правило сложения двух параллельных сил.

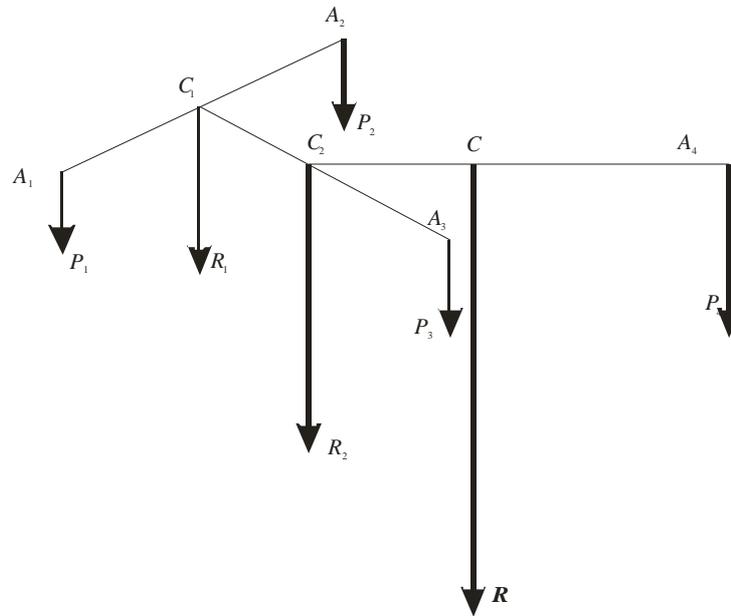


Рис.2.4 Сложение системы параллельных сил

Проведя через точки приложения сил P_1 и P_2 ось x , получим координаты этих точек, а также точки приложения их равнодействующей: $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $C(x')$.

Поскольку $\frac{A_1C_1}{C_1A_2} = \frac{P_2}{P_1}$, то, как следует из аналитической геометрии,

$$x' = \frac{P_1x_1 + P_2x_2}{P_1 + P_2}.$$

Далее получим

$$x' = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i};$$

$$y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i}.$$

В полученных выражениях под P_i следует понимать алгебраическое значение силы, т.е. учитывать ее направление соответствующим знаком (о знаках следует договориться заранее).

Операция, обратная сложению сил – разложение силы – выполняется с использованием полученных выше соотношений.

2.2. Равновесие параллельных сил. Момент силы

Рассмотрим тело, нагруженное системой параллельных сил (рис.2.5).

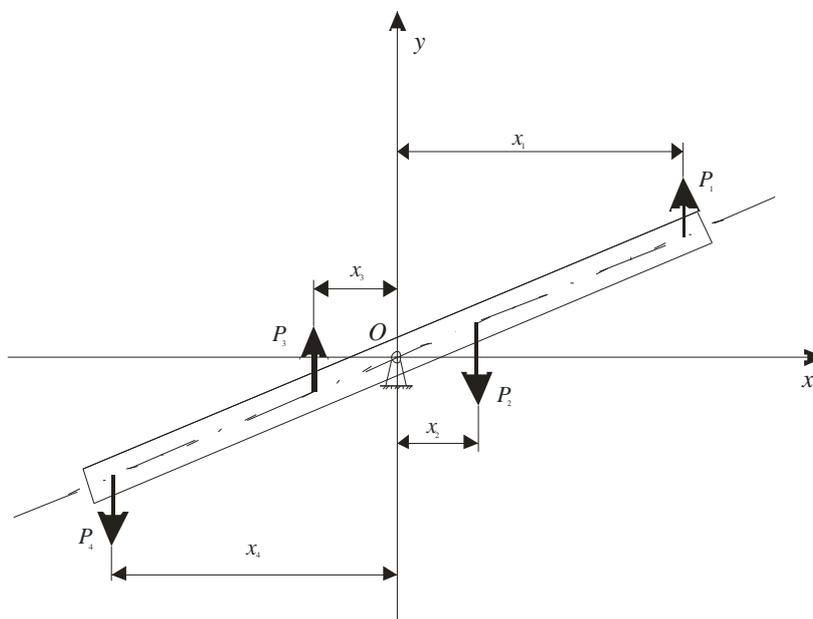


Рис.2.5 Рычаг, нагруженный системой параллельных сил

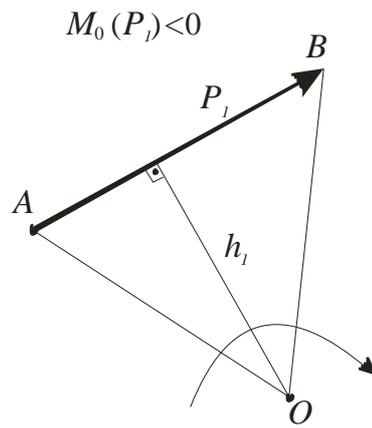
Через точку O проходит ось вращения тела. Тело, имеющее ось вращения, называют рычагом. Рычаг находится в равновесии, если через точку O проходит равнодействующая системы параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum Px}{\sum P}; \quad +P_1x_1 - P_2x_2 - P_3x_3 + P_4x_4 = 0.$$

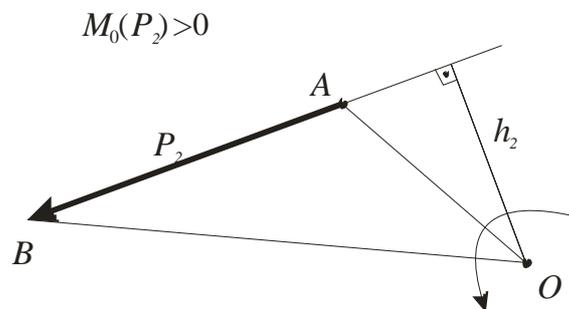
Здесь P_1x_1 - мера вращательного эффекта силы P_1 относительно точки O - момент силы P_1 относительно точки O :

$$m_0(P_1) = P_1h_1.$$

Момент силы относительно точки – произведение модуля силы на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы (рис.2.6).



a



б

Рис.2.6 Нахождение момента силы P относительно точки O

Обозначим через h плечо силы P . Произведение Ph больше нуля, если направление момента не совпадает с движением часовой стрелки, и меньше нуля, если совпадает.

Таким образом

$$m_0(P_1) = +P_1 h_1 = +P_1 x_1; \quad m_0(P_2) = +P_2 h_2 = +P_2 x_2;$$

$$m_0(P_3) = +P_3 h_3 = +P_3 x_3; \quad m_0(P_4) = +P_4 h_4 = +P_4 x_4.$$

Тогда условие равновесия рычага можно представить в виде

$$m_0(P_1) + m_0(P_2) + m_0(P_3) + m_0(P_4) = 0; \quad \sum m_0(P) = 0.$$

Таким образом, в случае равновесия рычага алгебраическая сумма моментов всех сил относительно точки O равна нулю.

2.3. Пара сил. Момент пары сил как вектор

Пара сил $P_1 = -P_2$ (рис.2.7) имеет плечо d , плоскость действия и меру вращательного эффекта - момент

$$m = Pd .$$

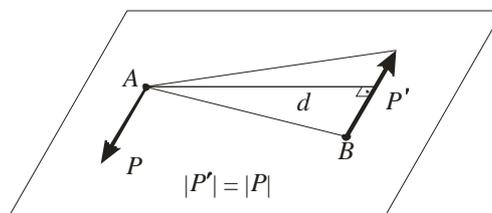


Рис.2.7 Пара сил и ее плоскость действия (d – плечо пары)

Используя понятие эквивалентных систем сил, можно доказать, что пару сил можно переносить в плоскости ее действия, в параллельную плоскость, изменять плечо или величину силы, сохраняя значение момента, при этом состояние тела не изменится (рис.2.8).

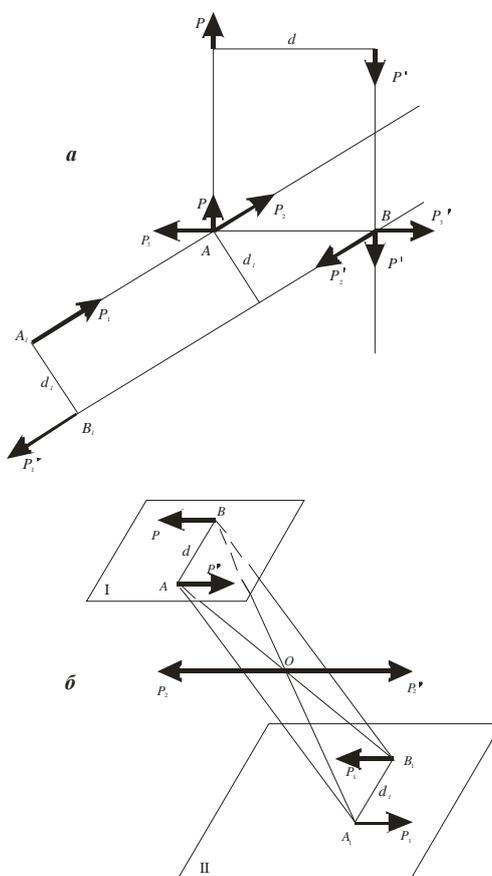


Рис.2.8 Перенос пары сил в плоскости её действия (а) и в параллельную плоскость (б)

Для переноса пары сил $P-P'$ в плоскости ее действия введем промежуточную эквивалентную систему сил (рис.2.8,а). Перенесем силы P и P' в точки соответственно А и В. Силу P разложим на составляющие P_1 и P_2 , силу P' - на P_1' и P_2' . Поскольку силы P_2 и P_2' имеют общую линию действия, равны по модулю и противоположны по направлению, они взаимно уничтожаются. Остаются равные составляющие P_1 и P_1' , которые образуют новую пару сил.

Модуль составляющей $P_1 = P/\sin \alpha$; плечо новой пары $d_1 = d \cdot \sin \alpha$. Момент исходной пары $m = -P \cdot d$; момент новой пары $m_1 = -(P/\sin \alpha)(d \cdot \sin \alpha) = -P \cdot d$. Следовательно, новая пара сил P_1-P_1' эквивалентна исходной паре $P-P'$.

Для переноса пары сил $P-P'$ из плоскости I в параллельную ей плоскость II введем промежуточную систему сил P_2-P_2' . В плоскости II размещена пара сил P_1-P_1' , причем $P_1 = P$ и $d_1 = d$. Сила P_2 является равнодействующей сил P и $-P_1$, сила P_2' - равнодействующая сил P' и $-P_1'$. Поскольку $P_2 = -P_2'$, эти силы взаимно уничтожаются. Остается пара сил P_1-P_1' , эквивалентная исходной паре $P-P'$.

Действие пары на данное тело вполне определяется модулем и направлением ее момента. Величина, имеющая модуль, направление и точку приложения, называется вектором. Момент пары - вектор, так как он имеет модуль, направление вращения и направлен по перпендикуляру к плоскости действия пары. Направление вектора определяется по правилу правого винта: направлен перпендикулярно плоскости пары так, чтобы смотря с его конца на пару, видеть эту пару вращающей тело против часовой стрелки (рис.2.9).

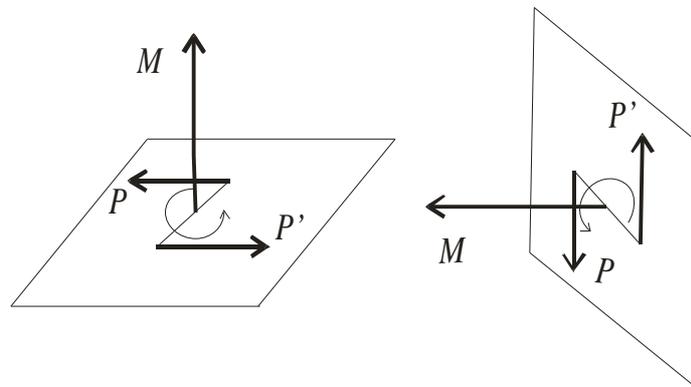


Рис.2.9 Определение направления вектора пары сил с использованием правила правого винта

Если вектор момента задан, то следовательно, определена плоскость действия пары сил или любая параллельная ей плоскость, задано численное значение момента пары и направление вращения пары. Особенность вектора момента состоит в том, что точка его приложения в пределах твердого тела может быть выбрана произвольно. Таким образом, *момент пары - вектор свободный* и для него справедливы все операции над векторами.

Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма их моментов равнялась нулю.

2.4. Приведение плоской системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент

Сформулируем правило переноса силы, приложенной к твердому телу, в произвольную точку того же тела. Задана сила P , приложенная в точке A , и точка B , в которую необходимо перенести силу P (рис.2.10).

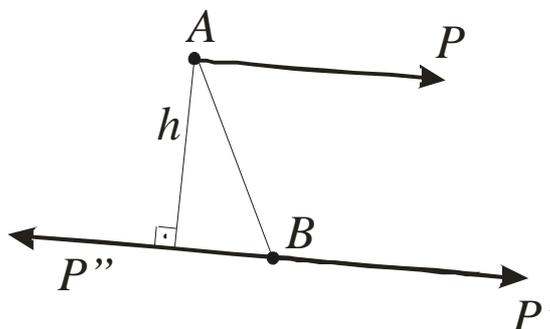


Рис.2.10 Параллельный перенос силы

Добавим в точке B уравновешенную систему сил $P'-P''$ при условии, что сила P' равна и параллельна исходной силе P . Полученную объединенную систему сил P, P', P'' представим в виде суммы силы P' и пары сил $P-P''$, момент которой

$$m = P \cdot h = m_B(P).$$

Таким образом, *всякая сила эквивалентна одинаковой с ней по модулю и направлению силе, приложенной в другой точке тела, и некоторой паре, момент которой равен моменту исходной силы относительно новой точки ее приложения.*

Поступая аналогичным образом с каждой силой системы сил (рис.2.11), переносим их в точку O (центр приведения). Получаем систему сходящихся сил, равнодействующая которых

$$R' = P_1' + P_2' + \dots + P_n' = \sum P',$$

и систему пар сил (моментов), суммарный вектор которых

$$M_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m_i,$$

где: R' - главный вектор; следует отметить, что главный вектор не является равнодействующей данной системы сил: главный вектор и равнодействующая одной и той же системы сил равны по модулю, параллельны, имеют одно направление, но разные линии действия;

M_0 - главный момент системы сил относительно данного центра; поскольку все векторы m_i параллельны, модуль главного момента

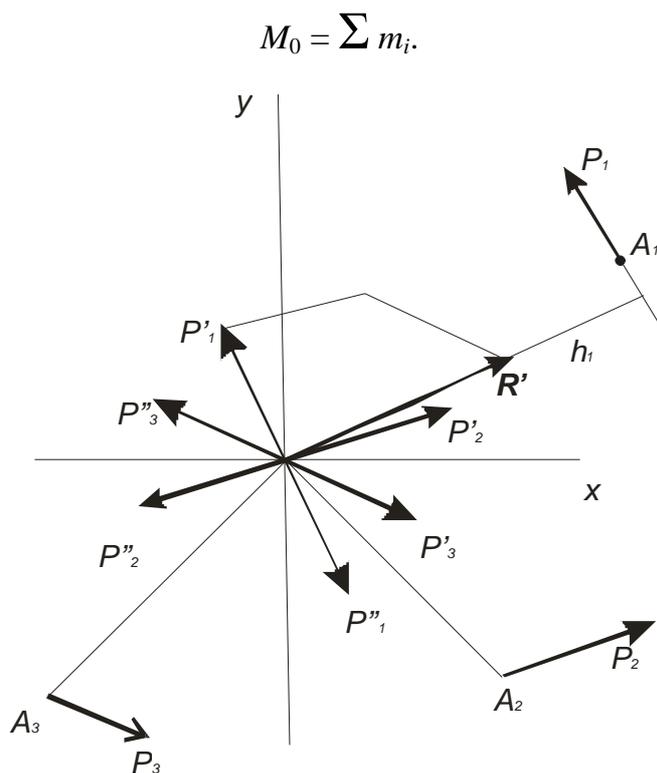


Рис.2.11 Приведение плоской системы сил к данному центру O

2.5 Теорема Вариньона. Равнодействующая и условия равновесия плоской системы сил

Теорема Вариньона: Момент равнодействующей плоской системы сил относительно любого центра, лежащего в плоскости этих сил, равен алгебраической сумме моментов этой системы относительно того же центра.

Заданы: главный вектор \mathbf{R}' и главный момент M_0 , приложенные в точке A (рис.2.12). Приведем эту систему к эквивалентной ей одной силе - равнодействующей.

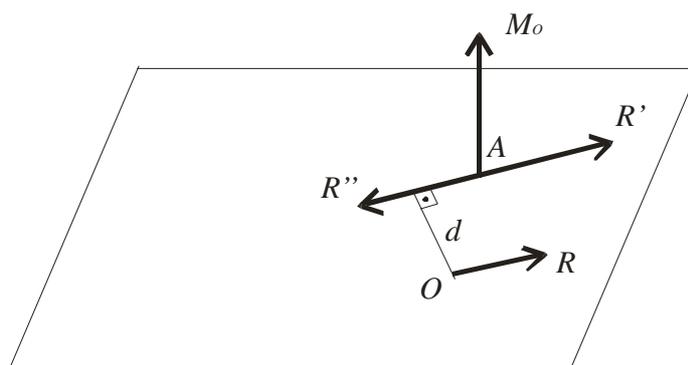


Рис.2.12 Приведение главного вектора \mathbf{R}' и главного момента M_0 и равнодействующей \mathbf{R} в точке O

Вместо главного момента M_0 введем пару сил \mathbf{R} , $-\mathbf{R}$ с условием, что сила \mathbf{R} равна, параллельна и направлена противоположно главному вектору \mathbf{R}' . Исходя из того, что момент этой пары равен M_0 , плечо пары $d = M_0 / R$.

Поскольку $|\mathbf{R}'| = |-\mathbf{R}|$, то эти силы взаимно уравновешиваются. В результате преобразований остается сила \mathbf{R} , приложенная в точке O на расстоянии d от линии действия \mathbf{R}' . Следовательно, сила \mathbf{R} , эквивалентная заданной системе, является ее равнодействующей. Момент равнодействующей \mathbf{R} относительно точки A равен

$$m_A(\mathbf{R}) = R \cdot d = M_0.$$

В свою очередь $M_0 = \sum m_i$, что соответствует формулировке теоремы Вариньона.

Поскольку система сил приводится к главному вектору и главному моменту, то для ее равновесия необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{R}' = 0 \text{ и } M_0 = 0,$$

так как сумма системы сил $R = \sum P_i$ и системы моментов $M_o = \sum m_o(P_i)$ эквивалентна заданной системе.

В аналитическом виде эти выражения представляются следующим образом:

$$\sum X = 0 ; \sum Y = 0 ; \sum m_o (P_i) = 0 .$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил этой системы на каждую из двух произвольно выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы сумма их моментов относительно произвольно выбранной точки также равнялась нулю.

Примеры к лекции 2

Пример 2.1. К балке, лежащей на двух стойках (рис. 2.13),

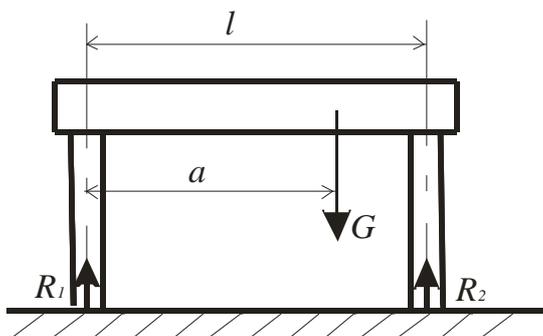


Рис. 2.13

подвешен груз $G = 100$ Н. Расстояние между стойками $l = 1$ м. На каком расстоянии a от левой стойки нужно подвесить груз, чтобы нагрузка на нее не превышала 20 Н?

Решение. Силы давления на стойки обозначим через R_1 и R_2 . Сила давления R_1 по условию должна быть не более 20 Н. Равнодействующая G раскладывается на две параллельные составляющие: $G = R_1 + R_2$. Откуда $R_2 = G - R_1 \geq 80$ Н.

Составляем пропорцию

$$\frac{R_2}{a} = \frac{G}{l},$$

откуда находим

$$a = \frac{R_2 l}{G} \geq \frac{80 \cdot 1}{100} = 0,8 \text{ м.}$$

Таким образом, расстояние a от левой стойки до точки приложения груза G должно быть не менее 0,8 м.

Пример 2.2. Балка шарнирно закреплена в опоре A и положена на каток B (рис. 2.14). Определить реакции в опорах, если $P = 2$ Н, $M = P \cdot a$, $q = 4P/a$.

Решение. Выбираем систему координат xAy . Освобождаем балку от связей. Реакция R_A неподвижного шарнира A будет направлена по оси y , поскольку в направлении оси x активные силы отсутствуют. Реакция R_B подвижной опоры (катка) перпендикулярна к опорной поверхности катка, т. е. направлена параллельно оси y .

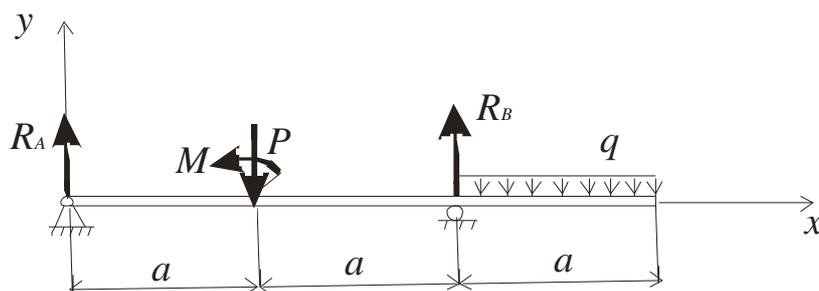


Рис 2.14

Сила P является сосредоточенной, а нагрузка интенсивности q распределена равномерно на участке балки длиной a . Интенсивность нагрузки имеет размерность силы, деленной на длину, например Н/м. Интенсивность находят из соотношения $q = dQ/dx$. Равнодействующую нагрузки получаем интегрированием этого выражения по длине участка: $Q = \int_l q \cdot dx$. Точка приложения равнодействующей равномерно распределенной нагрузки находится в середине участка, на котором она действует.

Составим уравнения равновесия балки:

$$\sum M_A = 0, \quad M - P \cdot a + R_B \cdot 2a - (qa) \cdot 2,5a = 0,$$

откуда

$$P \cdot a = P \cdot a + R_B \cdot 2a - \frac{4P}{a} \cdot \frac{5}{2} a = 0, R_B = 5P = 10 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия $\sum Y = R_A + - P - q \cdot a = 0$

получим $R_A + 5P - P - 4P = 0; R_A = 0.$

Пример 2.3. К вертикальному брусу, заделанному нижним концом в основание, приложены силы P_1, P_2, P_3 (рис.2.15). Определить реакции в заделке, если $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 2$ кН, $P_3 = 4$ кН, $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Выбираем систему координат xAy . Освобождаем брус от связи - жесткой заделки, заменяя ее неизвестной реактивной силой R_A с составляющими по координатным осям X_A, Y_A и парой с реактивным моментом m_A . Составляем уравнения равновесия бруса в виде

$$\begin{aligned} \sum X = 0; X_A + P_1 - P_2 \sin \alpha &= 0; X_A \cong -0,586 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0; Y_A - P_3 - P_2 \cos \alpha &= 0; Y_A \cong +5,414 \text{ Н}; \\ \sum M_A = 0; -P_1 \cdot 4 + P_2 \sin \alpha \cdot 3 + m_A &= 0; m_A \cong -3,757 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Знаки "минус" в решениях первого и третьего уравнений показывают, что истинные направления составляющей X_A реакции и реактивного момента m_A будут противоположны показанным на рис.2.15.

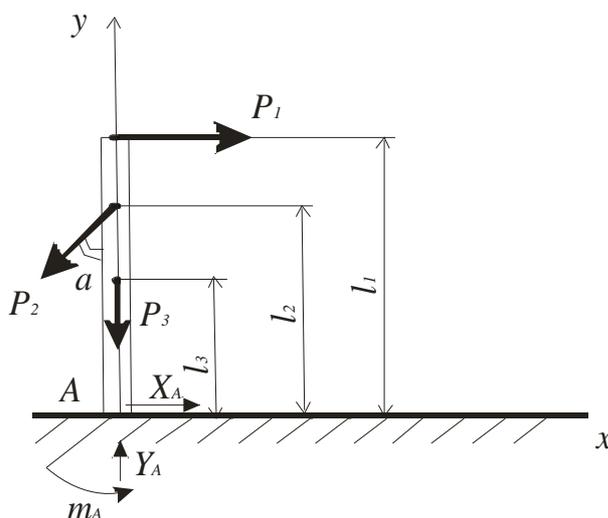


Рис 2.15. Брус, заделанный нижним концом в основание

Лекция 3. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ И УСЛОВИЯ ЕЕ РАВНОВЕСИЯ

3.1. Понятие о скалярном и векторном произведении двух векторов

Скалярным произведением двух векторов a и b называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$a \cdot b = a \cdot b \cdot \cos \alpha .$$

Свойства скалярного произведения:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a; \\ \left. \begin{aligned} i \cdot i &= j \cdot j = k \cdot k = 1, \\ i \cdot j &= j \cdot k = k \cdot i = 0; \end{aligned} \right\} \\ a &= a_x i + a_y j + a_z k; \\ b &= b_x i + b_y j + b_z k; \\ a \cdot b &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Векторным произведением двух векторов a и b (рис.3.1) является вектор, определяемый следующим образом:

- модуль вектора равен $a \cdot b \cdot \sin \alpha$ (т.е. площади параллелограмма $AOBC$, построенного на векторах a и b);
- вектор направлен перпендикулярно обоим векторам a и b в сторону, определяемую по правилу правого винта.

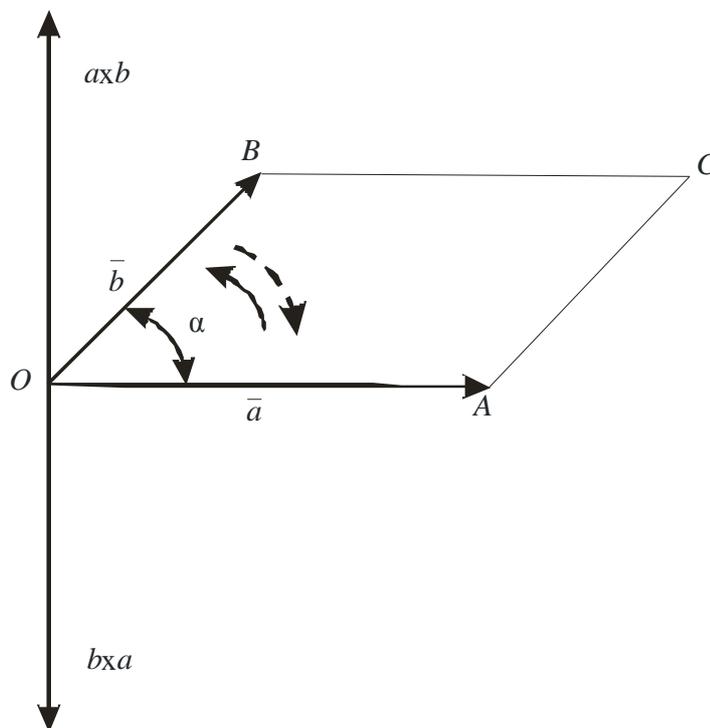


Рис. 3.1 Векторное произведение двух векторов

Свойства векторного произведения:

$$(b \times a) = -(a \times b);$$

если $a \perp b$, $\hat{=} (a \times b) = ab$;

если $a \parallel b$ $\hat{=} (a \times b) = 0$.

Для координатных ортов (рис.1.10)

$$i \times i = 0; \quad j \times j = 0; \quad k \times k = 0;$$

$$i \times j = k; \quad j \times k = i; \quad k \times i = j;$$

$$j \times i = -k; \quad k \times j = -i; \quad i \times k = -j;$$

Если

$$a = a_x i + a_y j + a_z k; \quad b = b_x i + b_y j + b_z k,$$

то

$$a \times b = (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k,$$

или

$$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

3.2. Момент силы относительно точки как векторное произведение

Определим момент силы P в точке A относительно точки O . Перенесем силу в точку O параллельно самой себе (рис.3.2).

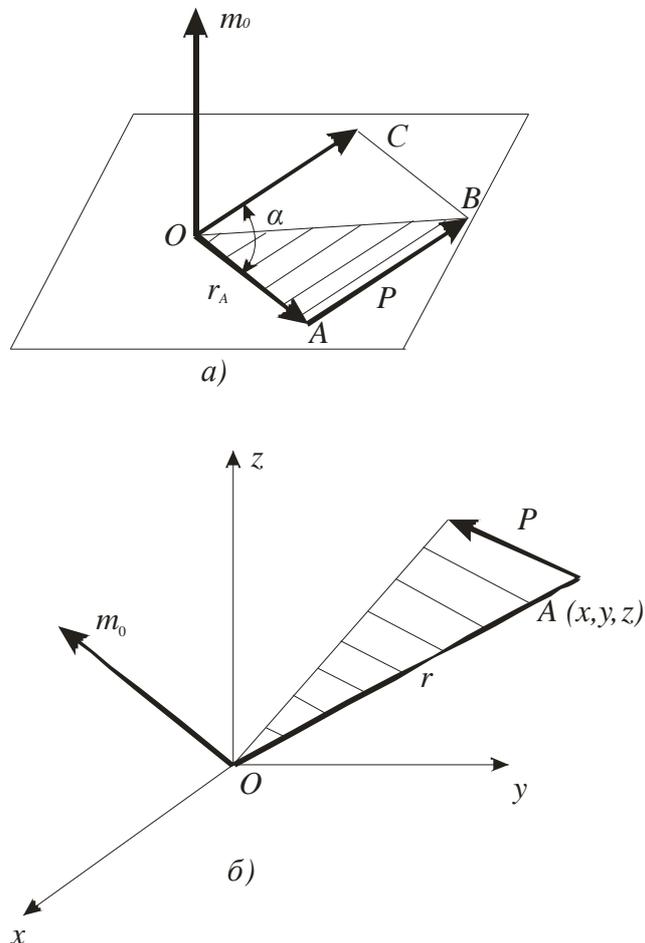


Рис. 3.2 Момент силы P относительно точки O (m_0) как векторное произведение $r \times \vec{P}$: a - плоская система координат; b - пространственная система координат

Здесь OA - радиус-вектор точки A , OC - новый вектор в точке O . Согласно определению

$$r \times OC = m_0,$$

или

$$m_0 = r \times P;$$

$$m_0(P) = r \times P.$$

Если

$$r = r_x i + r_y j + r_z k;$$

$$P = X_i + Y_j + Z_k,$$

то

$$m_o(P) = m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = (r_y Z - r_z Y)i + (r_z X - r_x Z)j + (r_x Y - r_y X)k = m_x i + m_y j + m_z k.$$

Следовательно, моменты силы относительно координатных осей равны

$$m_x(P) = r_y Z - r_z Y;$$

$$m_y(P) = r_z X - r_x Z;$$

$$m_z(P) = r_x Y - r_y X.$$

3.3. Приведение произвольной системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент. Инварианты системы сил. Условия равновесия

Пользуясь правилом параллельного переноса сил, любую систему сил, как и плоскую, приводят к одной силе и к одной паре (рис.3.3):

$$R' = P'_1 + P'_2 + \dots + P'_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P;$$

$$M_O = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum m = m_O(P_1) + m_O(P_2) + \dots + m_O(P_n),$$

где R' - главный вектор; M_O - главный момент; O - центр приведения.

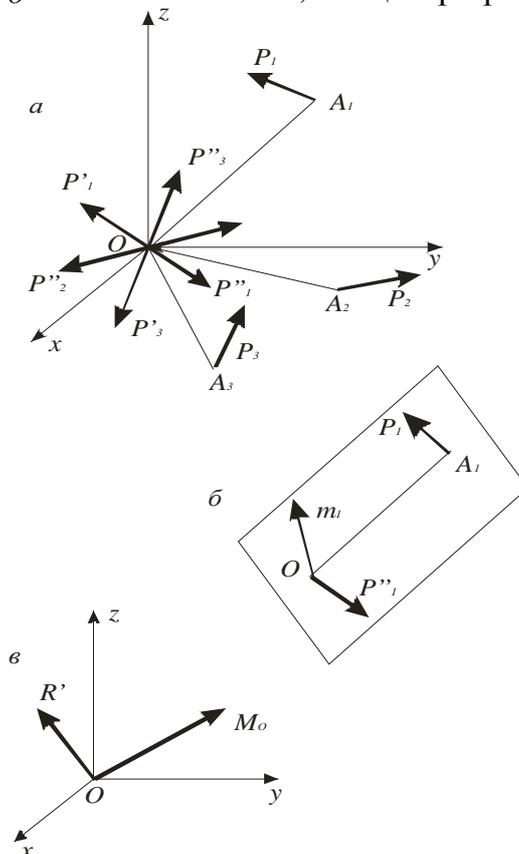


Рис. 3.3 Приведение произвольной системы сил к заданному центру: а - произвольная система сил; б - главный вектор R' и главный момент M_O в центра приведения (точка O)

Ни модуль, ни направление R' не зависят от центра приведения - *главный вектор системы сил инвариантен по отношению к центру приведения.*

Вторым инвариантом системы сил по отношению к центру приведения является скалярное произведение главного вектора и главного момента (без доказательства):

$$R' M'_O \cos \varphi' = R' M_O \cos \varphi,$$

где O' - новый центр приведения; M_O - главный момент относительно нового центра приведения; φ' - угол между векторами R' и M'_O .

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы относительно любого центра приведения выполнялись условия

$$R' = 0; \quad M = 0,$$

или в алгебраической форме:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \sum Y &= 0; & \sum Z &= 0; \\ \sum m_x(P) &= 0; & \sum m_y(P) &= 0; & \sum m_z(P) &= 0; \end{aligned}$$

Последние соотношения являются условиями равновесия произвольной системы сил.

Частные случаи:

а) Система сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0;$$

б) Плоская система сил:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum m_z(P) = 0; (\sum m_o(P) = 0).$$

в) Система параллельных сил:

$$\sum Z = 0; \sum m_x(P) = 0; \sum m_y(P) = 0.$$

3.4. Определение центра тяжести тел и фигур сложной формы

Представляем произвольное тело в виде набора тел, силы тяжести которых параллельны (рис.3.4,а).

Центр тяжести и точка приложения равнодействующей этой системы параллельных сил - точка C . Координаты этой точки определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum P_x}{\sum P}; y_c = \frac{\sum P_y}{\sum P}; z_c = \frac{\sum P_z}{\sum P}.$$

Разбивая тело на элементарные объемы ΔV , можно записать: $P_1 = \gamma \cdot \Delta V_1$, $P_2 = \gamma \cdot \Delta V_2, \dots, P_n = \gamma \cdot \Delta V_n$, где γ – удельный вес материала тела. Тогда

$$x_c = \frac{\sum x \cdot g \cdot \Delta V}{\sum g \cdot \Delta V} = \frac{\sum x \cdot \Delta V}{\sum \Delta V} = \frac{\sum x \cdot \Delta V}{V} = \frac{\lim \sum x \cdot \Delta V}{V};$$

$$y_c = \frac{\sum y \cdot \Delta V}{V} = \frac{\lim \sum y \cdot \Delta V}{V}; z_c = \frac{\sum z \cdot \Delta V}{V} = \frac{\lim \sum z \cdot \Delta V}{V};$$

или в интегральной форме:

$$x_c = \frac{\int x \cdot dV}{V}; y_c = \frac{\int y \cdot dV}{V}; z_c = \frac{\int z \cdot dV}{V}.$$

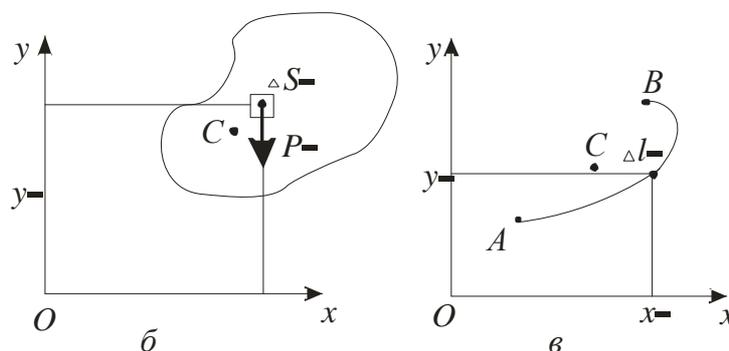
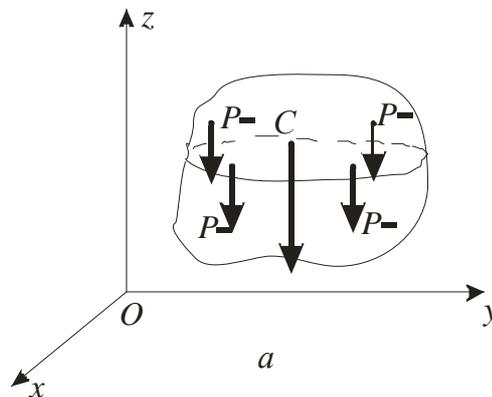


Рис.3.4 Нахождение центра тяжести (точке C): а - произвольного тела; б - плоской материальной фигуры; в - плоской материальной линии

Аналогично получают формы для определения центра тяжести однородной плоской материальной фигуры (рис.3.4, б):

$$x_c = \frac{\lim \sum x \cdot \Delta S}{S} = \frac{\int x \cdot dS}{S};$$

$$y_c = \frac{\lim \sum y \cdot \Delta S}{S} = \frac{\int y \cdot dS}{S}$$

и однородной плоской материальной линии (рис.3.4, в):

$$x_c = \frac{\lim \sum x \cdot \Delta l}{l} = \frac{\int x \cdot dl}{l};$$

$$y_c = \frac{\lim \sum y \cdot \Delta l}{l} = \frac{\int y \cdot dl}{l}.$$

Из геометрии известно положение центра геометрических тел и фигур элементарной формы (треугольника, прямоугольника, цилиндра, шара и т.п.). На рис. 3.5 приведены координаты центров тяжести призмы, пирамиды, конуса и треугольника.

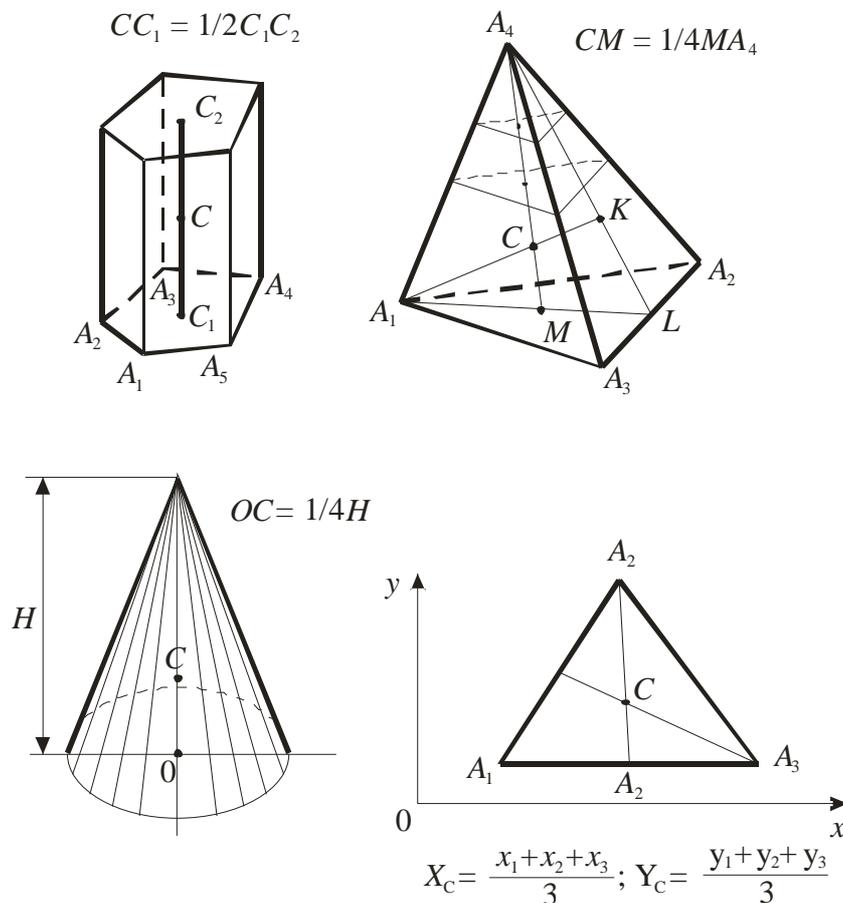


Рис.3.5. Положение центра тяжести элементарных геометрических фигур

Для определения центра тяжести тел и фигур сложной формы, составленных из тел и фигур элементарной формы, используют правило определения центра тяжести системы параллельных сил. Многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис.3.6) составлен из трех треугольников, центры тяжести которых C_i и силы тяжести P_i .

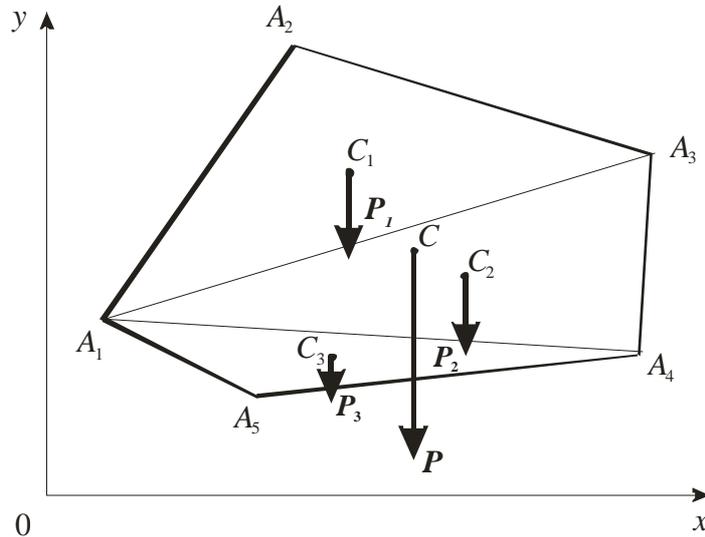


Рис.3.6 Определение центра тяжести многоугольника

Координаты центра C системы параллельных сил:

$$x_c = \frac{P_1 \cdot x_{c1} + P_2 \cdot x_{c2} + P_3 \cdot x_{c3}}{P_1 + P_2 + P_3};$$

$$y_c = \frac{P_1 \cdot y_{c1} + P_2 \cdot y_{c2} + P_3 \cdot y_{c3}}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Для однородной материальной фигуры постоянной толщины

$$P_1 = \gamma \cdot \Delta S_1, P_2 = \gamma \cdot \Delta S_2, P_3 = \gamma \cdot \Delta S_3.$$

Здесь γ – удельный вес материала фигуры, S – площадь.

Тогда

$$x_c = \frac{S_1 x_{c1} + S_2 x_{c2} + S_3 x_{c3}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{\sum S_i x_{ci}}{\sum S_i};$$

$$y_c = \frac{S_1 y_{c1} + S_2 y_{c2} + S_3 y_{c3}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{\sum S_i y_{ci}}{\sum S_i}.$$

Примеры к лекции 3

Пример 3.1. Квадратная прямоугольная плита размером $l \times l = 4 \times 4$ м ($\beta = 45^\circ$) и весом $P = 20$ кН удерживается в горизонтальном положении тросом KC , цилиндрическим подпятником B и шарниром A (рис.3.7).

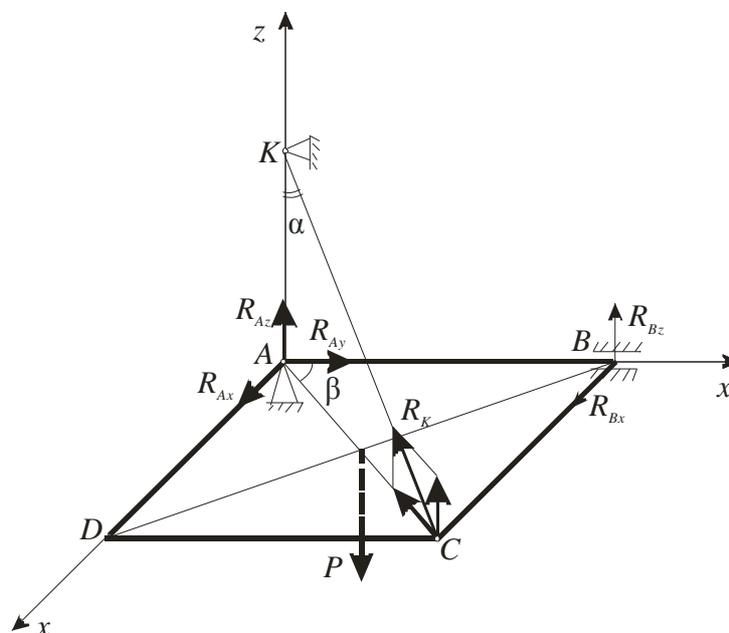


Рис.3.7 Плита, закрепленная с помощью троса и подпятника

Определить реакции связей, если угол между тросом и плоскостью плиты $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Освободим плиту от связей. Реактивную силу в шарнире A заменим тремя составляющими R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Az} , реакцию подпятника R_B заменим двумя составляющими R_{Bx} , R_{Bz} . Реакция троса R_K направлена вдоль троса, ее проекция на ось z равна

$$R_{Kz} = R_K \sin \alpha = R_K \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а проекции на оси x и y равны:

$$R_{Kx} = R_{Ky} = R_K \sin \alpha \cos \beta = \frac{R_K}{2}.$$

Составляем уравнения равновесия плиты:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad R_{Ax} + R_{Bx} - R_{Kx} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad R_{Ay} - R_{Ky} = 0; \\ \sum Z = 0; & \quad R_{Az} - P + R_{Kz} + R_{Bz} = 0; \\ \sum M_x = 0; & \quad -\frac{Pl}{2} + R_{Bz}l + R_{Kz}l = 0; \\ \sum M_y = 0; & \quad \frac{Pl}{2} - R_{Kz}l = 0; \\ \sum M_z = 0; & \quad R_{Bx}l = 0. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений, находим

$$\begin{aligned} R_{Ax} = R_{Ay} = \frac{P\sqrt{2}}{4}; & \quad R_{Az} = \frac{P}{2}; \\ R_{Bx} = R_{Bz} = 0; & \\ R_{Kx} = R_{Ky} = \frac{P\sqrt{2}}{4}; & \quad R_{Kz} = \frac{P}{2}. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Горизонтальный вал (рис.3.8) длиной $2l = 100$ мм установлен в подшипнике *A* и подпятнике *B*.

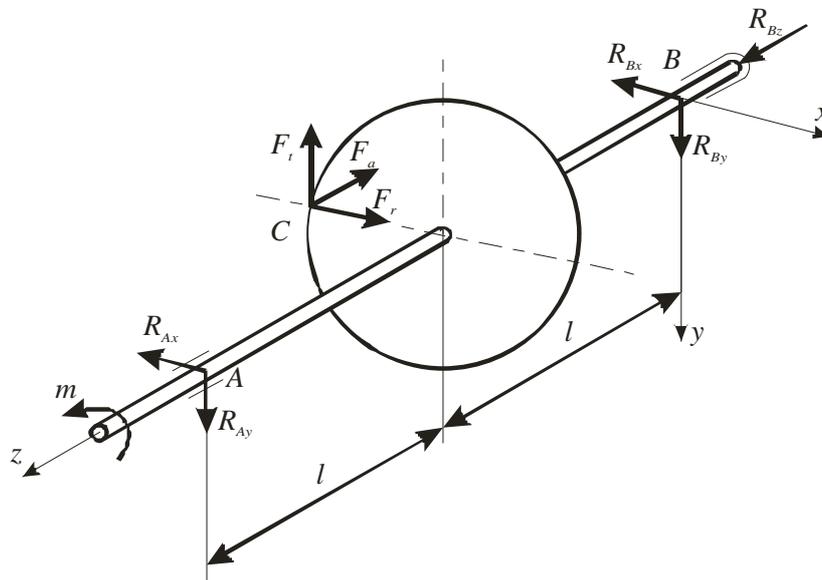


Рис.3.8 Вал, установленный в подшипнике *A* и подпятнике *B*

На валу закреплено зубчатое колесо, на которое действуют силы: окружная $F_t = 100$ Н, радиальная $F_r = 37$ Н и осевая $F_a = 18$ Н. Диаметр колеса $d = 200$ мм. Определить в положении равновесия момент m и реакции опор *A* и *B*.

Решение. Освободим вал от связей. Подшипник *A* воспринимает только радиальную силу, которую представим двумя составляющими R_{Ax} , R_{Ay} . Подпятник *B* воспринимает тангенциальную, радиальную и осевую силы и поэтому имеет три составляющие R_{Bx} , R_{By} , R_{Bz} .

Составляем уравнения равновесия вала:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad F_R - R_{Ax} - R_{Bx} = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad R_{Ay} + R_{By} - F_t = 0; \\ \sum Z = 0; & \quad R_{Bz} - F_a = 0; \\ \sum M_x = 0; & \quad R_{Ay} 2l - F_t l = 0; \\ \sum M_y = 0; & \quad R_{Ax} 2l + F_a \frac{d}{2} - F_R l = 0; \\ \sum M_z = 0; & \quad m - F_t \frac{d}{2} = 0. \end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= 0,5 \text{ Н}; & R_{Ay} &= 50,0 \text{ Н}; \\ R_{Bx} &= 36,5 \text{ Н}; & R_{By} &= 50,0 \text{ Н}; & R_{Bz} &= 18 \text{ Н}. \end{aligned}$$

$$m = 10000 \text{ Н}\cdot\text{мм} = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad R_A = 50,0 \text{ Н}; \quad R_B = 64,5 \text{ Н}.$$

Пример 3.3. Определить координаты центра тяжести однородной пластины постоянной толщины, показанной на рис.3.9.

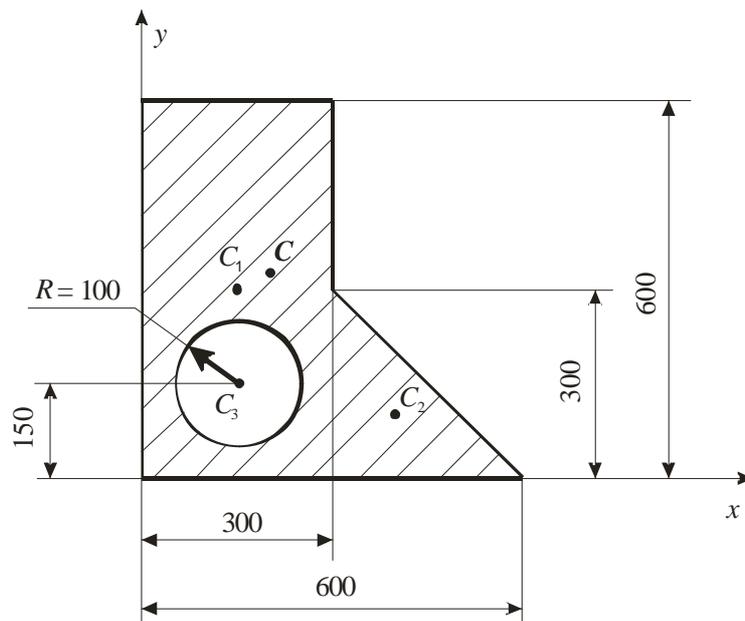


Рис.3.9 Пластина

Решение. Разбиваем пластину на три простые фигуры: прямоугольник 1 (без учета отверстия), треугольник 2 и круг 3 (площадь которого как отверстия считаем отрицательной). Вычисляем площади фигур:

$$F_1 = 300 \cdot 600 = 18 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$F_2 = \frac{300 \cdot 300}{2} = 4,5 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$F_3 = p \cdot 100^2 \cong 3,1416 \cdot 10^4 \text{ мм}^2.$$

Определяем координаты центров тяжести фигур в выбранной системе координат. Для прямоугольника: $x_1 = 150$ мм, $y_1 = 300$ мм. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан на расстоянии одной трети длины каждой медианы от соответствующей стороны треугольника: $x_2 = 400$ мм, $y_2 = 100$ мм. Для круга: $x_3 = 150$ мм, $y_3 = 150$ мм.

Определяем координаты центра тяжести пластины:

$$y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 - F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 - F_3} = \frac{18 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^2 + 4,5 \cdot 10^4 \cdot 10^2 - 3,1416 \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^2}{(18 + 4,5 - 3,1416) \cdot 10^4} \cong 278 \text{ мм};$$

$$x_c = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3}{F_1 + F_2 - F_3} = \frac{18 \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^2 + 4,5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^2 - 3,1416 \cdot 10^4 \cdot 1,5 \cdot 10^2}{19,3584 \cdot 10^4} \cong 208 \text{ мм}.$$

Лекция 4. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Основные понятия, используемые в кинематике

Кинематика – раздел механики, изучающий движение абсолютно твердого тела. Система координат, связанная с телом, относительно которого изучается движение, называется системой отсчета.

Для кинематического определения движения тела необходимо указать его положение относительно выбранной системы отсчета в каждый момент времени.

Движение происходит в пространстве и времени. Пространство трехмерное евклидово. Время универсальное – одинаковое во всех системах отсчета. Различают "момент времени t " и "промежуток времени t ".

Момент времени t – число секунд, отделяющих данный момент времени от некоторого начального момента.

Промежуток времени t – число секунд, отделяющих два последовательных момента времени ($t_2 - t_1$).

Различают кинематику точки и кинематику абсолютно твердого тела.

Траектория точки – линия, описываемая движущейся точкой в пространстве. В соответствии с формой траектории выделяют прямолинейное и криволинейное движение.

4.2. Прямолинейное движение точки

Закон движения точки M по оси x задается в виде (рис.4.1):

$$x = f(t).$$

График, соответствующий этому закону, называют графиком движения.

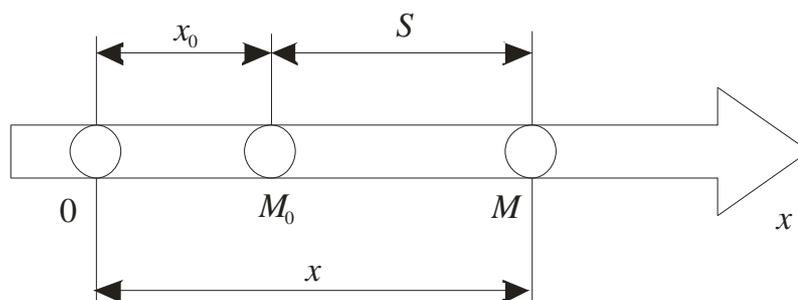


Рис.4.1 Прямолинейное движение точки M по оси x

Равномерное движение:

Скорость движения: $V = \frac{S}{t} = const.$ Закон движения: $S = S_0 + V \cdot t.$

Неравномерное движение:

Скорость движения: $V = \frac{dx}{dt} = f'(t).$ График $f'(t)$ – график скоростей (кривая скоростей).

Закон движения: $S = \int_{t_1}^{t_2} V dt = \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt.$ Пройденный путь равен площади под кривой на графике скоростей.

Ускорение

Ускорение движения: $W = \frac{dV}{dt} = f''(t).$

Равноускоренное движение:

Ускорение движения: $W = a = const.$

$$dV = a \cdot dt;$$

$$V = V_0 + at;$$

$$S = \int_0^t V dt = \int_0^t (V_0 + at) dt = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{t}{2} (V_0 + V_0 + a \cdot t) = \frac{V + V_0}{2} t;$$

$$a = \frac{V - V_0}{t}.$$

При свободном падении с ускорением g

$$V = V_0 + g \cdot t;$$

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2;$$

$$V = g \cdot t; \quad S = \frac{1}{2} g \cdot t^2;$$

$$V = \sqrt{2g \cdot S}.$$

По аналогии с графиком скоростей (кривой скоростей) строят график ускорений $W = f''(t).$

4.3. Криволинейное движение точки

4.3.1. Дифференцирование переменного вектора

Имеем векторную функцию $a = F(t)$. Геометрическое место концов вектора a в различные моменты времени называют *годографом вектора a* (рис.4.2):

$$\frac{da}{dt} = \overline{AC}$$

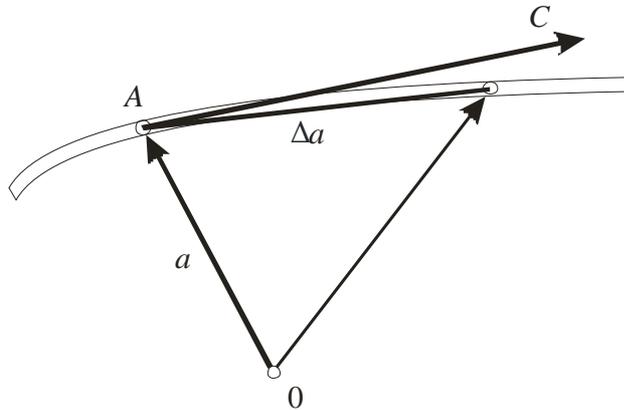


Рис.4.2 Годограф вектора a

Вектор \overline{AC} - касательный к годографу a . Если $a = a_x i + a_y j + a_z k$, то проекция производной данного вектора на неподвижную ось, которая равна производной от проекции этого вектора на ту же ось:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k;$$

$$\frac{da_x}{dt} = \left(\frac{da}{dt} \right)_x.$$

4.3.2. Скорость и ускорение при криволинейном движении

Имеем закон движения по криволинейной траектории

$$S = f(t).$$

Скорость движения $V = \frac{dS}{dt} = f'(t)$.

Задавая траекторию в виде векторной функции $z = F(t)$ (рис.4.3),

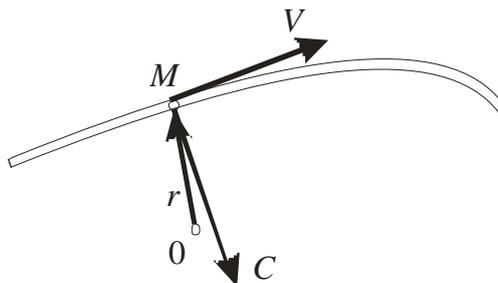


Рис.4.3 Траектория криволинейного движения точки M

получим:

$$\text{скорость } V = \frac{dr}{dt};$$

$$\text{ускорение } W = \frac{dV}{dt} = \overline{MC},$$

где: r – радиус-вектор движущейся точки M , $r = \overline{OM}$;

\overline{MC} - касательная к годографу скоростей (рис.4.4).

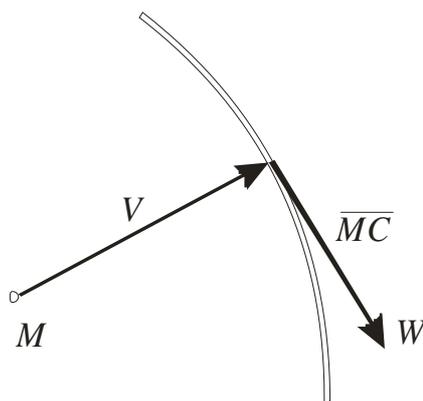


Рис.4.4 Годограф скоростей

4.3.3. Уравнение движения, скорость и ускорение в декартовых координатах

Уравнения движения в проекциях на оси координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Поскольку $r = xi + yj + zk$, $V = \frac{dr}{dt}$,

то

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$

$$V_x = V \cos(V, i); \quad V_y = V \cos(V, j);$$

$$V_z = V \cos(V, k).$$

Для направляющих косинусов имеем

$$\cos(V, i) = \frac{dx}{dt} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos(V, j) = \frac{dy}{dt} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos(V, k) = \frac{dz}{dt} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

Аналогично - для ускорений точек

$$W_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad W_z = \frac{d^2z}{dt^2};$$

$$W = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} \right)^2}.$$

4.4. Кривизна линии и радиус кривизны

Кривизна линии в точке А (рис.4.5)

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}.$$

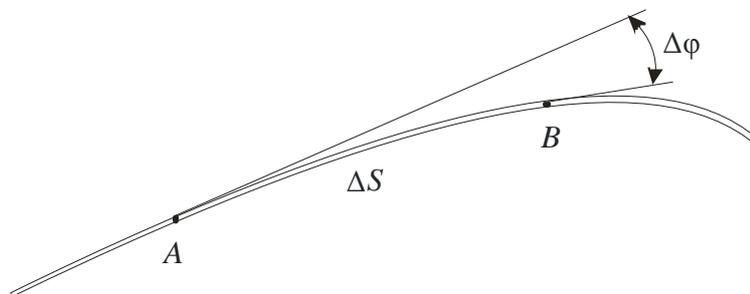


Рис.4.5 Определение кривизны кривой

Радиус кривизны $\rho = \frac{1}{k}$ - это радиус такой окружности, которая имеет в данной точке заданной линии одинаковую в ней кривизну. В окрестности данной точки заданная линия совпадает с дугой окружности одинаковой с ней кривизны.

В данной точке M кривой (рис.4.6) выделяют две плоскости: соприкасающуюся C и нормальную H .

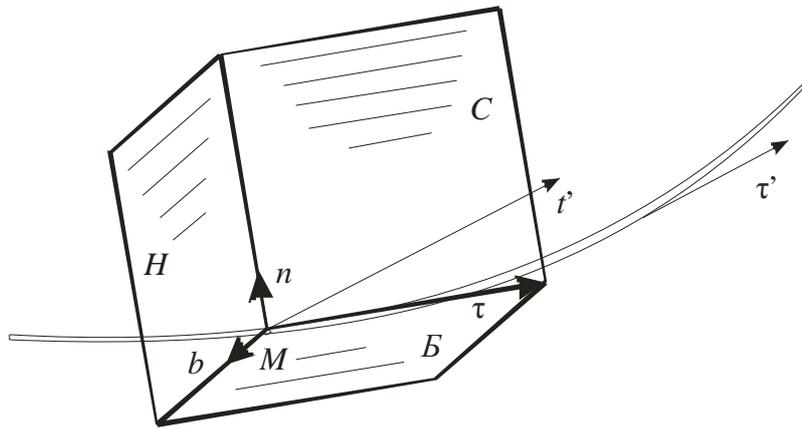


Рис.4.6 Естественные оси координат в произвольной точке кривой

В соприкасающуюся плоскость в пределе переходит плоскость $\tau'M''$. Векторы b, τ, n ориентированы так же, как и орты правой системы координат i, j, k ; они определяют естественные оси:

$$b = \tau \times n.$$

4.5. Касательное и нормальное ускорения

Для скорости в точке M (рис.4.7)

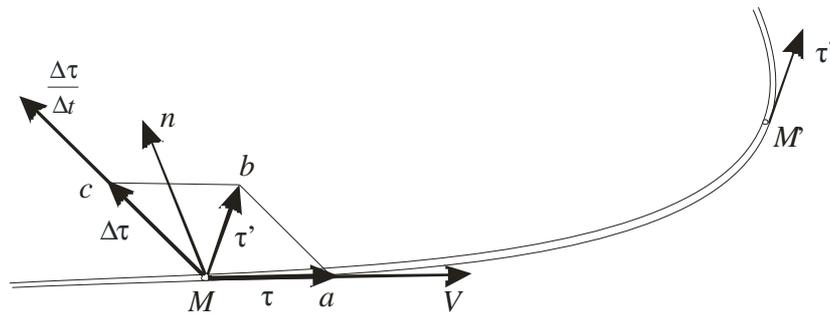


Рис.4.7 Определение нормального и касательного ускорений в произвольной точке кривой

справедливо векторное равенство

$$\vec{V} = V \vec{\tau},$$

где V – модуль скорости, $\vec{\tau}$ – ее орт.

Поскольку ускорение $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, то $\vec{W} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + V \frac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Вектор $d\vec{\tau}/dt$ лежит в соприкасающейся плоскости C и совпадает с направлением главной нормали n . Модуль этого вектора равен (без вывода):

$$\left| \frac{d\tau}{dt} \right| = \frac{V}{\rho}$$

Таким образом, можно записать

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{\rho} \vec{n} \quad \text{или} \quad \vec{W} = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}.$$

Первое слагаемое называется **касательным ускорением**, второе - **нормальным**. Их значения, а также величину полного ускорения можно рассчитать по формулам:

$$\vec{W}_\tau = \frac{dV}{dt} \vec{\tau}; \quad \vec{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \vec{n};$$

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}.$$

Рассмотрим расчет касательной и нормальной составляющих ускорения для частных случаев движения.

а) *Прямолинейное движение:*

$$r = \infty; W_n = V^2/g = 0; W_t = dV/dt.$$

Касательное ускорение W_τ совпадает с направлением движения или противоположно ему в зависимости от знака производной. Соответственно имеем увеличение скорости (разгон или ускорение) или уменьшение скорости (торможение).

в) *Равномерное прямолинейное движение:*

$$W_\tau = W_n = 0; W = 0.$$

с) *Равномерное криволинейное движение:*

$$V = const; W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0; W_n = \frac{V^2}{\rho},$$

Нормальное ускорение W_n направлено по главной нормали в сторону вогнутости траектории, т.е. к центру ее кривизны

Примеры к лекции 4

Пример 4.1. Кривошипно-шатунный механизм (рис.4.8)

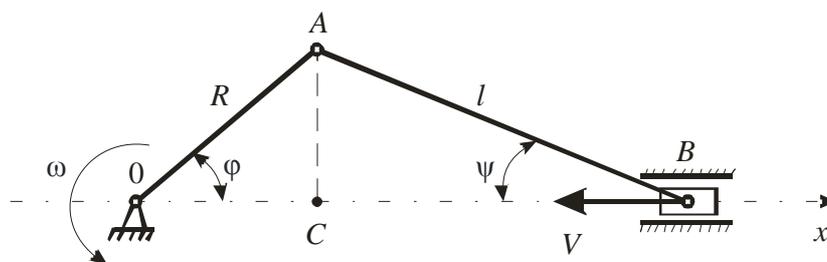


Рис.4.8 Кривошипно-шатунный механизм: OA – кривошип; AB – шатун; B – ползун

состоит из трех подвижных звеньев: кривошипа OA длиной r , шатуна AB , длина которого l , и ползуна B . Звенья механизма шарнирно соединены между собой. Ведущее звено - кривошип - вращается вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω . Ведомое звено - ползун - движется поступательно в прямолинейных направляющих. Определить скорость и ускорение ползуна в моменты времени $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/4$, $t_3 = \pi/2$ с, если: $r = 100$ мм, $l = 500$ мм, $\omega = 2$ рад/с.

Решение. При равномерном вращении угол φ поворота кривошипа связан с угловой скоростью ω соотношением

$$\varphi = \omega t,$$

где t – время.

Угол наклона шатуна ψ находим из треугольника OAB , используя теорему синусов:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \frac{r}{l}; \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi;$$

$$\psi = \arcsin \left(\frac{r}{l} \sin \varphi \right)$$

Закон движения ползуна находим из геометрических соображений, определяя его координату x из треугольника OAB :

$$x = OC + CB = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Скорость ползуна V равна

$$V = \frac{dx}{dt} = - \left(r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + l \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \right)$$

где $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, а $\frac{d\psi}{dt}$ находим, дифференцируя по t выражение, связывающее углы ψ и φ :

$$\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{r}{l} \cos \frac{dj}{dt}.$$

Тогда $\frac{d\psi}{dt} = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \psi} \omega.$

Окончательно для скорости V ползуна получаем выражение

$$V = -r\omega \left(\sin \varphi + \sin \psi \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \right) = -r\omega \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi}.$$

Таким образом, скорость в текущий момент времени находим через углы φ и ψ .

Ускорение ползуна W равно $W = \frac{dV}{dt}.$

Прежде чем продифференцировать функцию $V(t)$, преобразуем ее, учитывая, что при $r/l = 0,2$ с точностью до 2% $\cos \psi \approx 1$.

При этом

$$V = -r\omega(\sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi),$$

или с учетом выражения для $\sin \psi$

$$V = -r\omega \left(\sin j + \frac{r}{l} \sin j \cos j \right) = -r\omega \left(\sin j + \frac{r}{2l} \sin 2j \right)$$

Тогда

$$W = \frac{dV}{dt} = -r\omega \left(\cos j \frac{dj}{dt} + \frac{r}{l} \cos 2j \frac{dj}{dt} \right) = -r\omega^2 \left(\cos j + \frac{r}{l} \cos 2j \right)$$

Вычислим значения V и W для трех заданных моментов времени:

$$t_1 = 0; t_2 = \frac{P}{4} c; t_3 = \frac{P}{2} c;$$

$$t_1 = 0; j = 0; V = 0; W = -100 \cdot 2^2 \left(1 + \frac{100}{500} \right) = -4,8 \cdot 10^2 \text{ мм/с}^2;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{4} c; j = \frac{\pi}{2}; V = -r\omega = -100 \cdot 2 = -200 \text{ мм/с};$$

$$W = \frac{r^2}{l} \omega^2 = \frac{100^2 \cdot 2^2}{500} = 0,8 \cdot 10^2 \text{ мм/с}^2;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{2} c, j = \pi; V = 0;$$

$$W = -r\omega^2 \left(-1 + \frac{r}{l} \right) = -100 \cdot 2^2 \left(-1 + \frac{100}{500} \right) = 3,2 \cdot 10^2 \text{ мм/с}^2.$$

Пример 4.2. Определить траекторию точки M и закон ее движения по траектории, если положение точки на плоскости задается уравнениями

$$x = a \cdot \cos^2(kt); y = a \cdot \sin^2(kt).$$

Решение. Траектория точки представляет собой уравнение $y = y(x)$, определяющее возможные положения точки M на плоскости. Для его определения исключим время t из заданных уравнений $x(t)$ и $y(t)$, сложив их. Получим уравнение прямой (рис.4.9):

$$x + y = a.$$

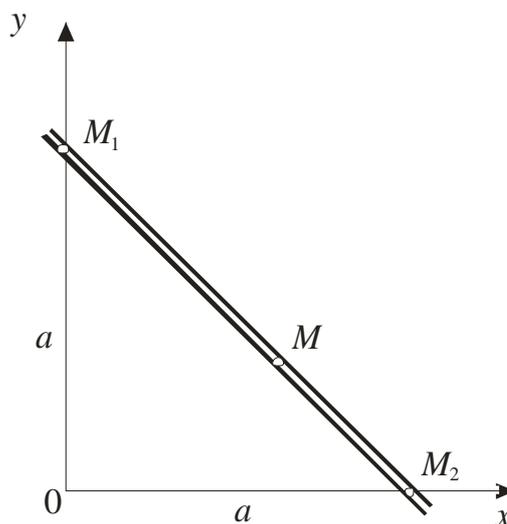


Рис. 4.9

В начальный момент времени $t_0 = 0$ точка M находится в положении $M_0(a, 0)$, а в момент времени $t_1 = \pi/2k$ – в положении $M_1(0, a)$. Далее, в момент времени $t_2 = 2t_1 = \pi/k$ точка M возвращается в положение M_0 , т.е. происходят колебания точки M на отрезке M_0M_1 с периодом $T = \pi/k$. Закон движения определяет положение точки на ее траектории.

Поскольку траектория точки представляет собой прямую линию, то вектор скорости точки всегда направлен вдоль этой прямой. Положение точки на траектории (расстояние S от точки M_0 до точки M) связано со скоростью V соотношениями

$$V = \frac{dS}{dt}; S = \int V dt.$$

В свою очередь,

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -2ak \cos(kt) \sin(kt) = -ak \sin(2kt);$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 2ak \cos(kt) \sin(kt) = ak \sin(2kt).$$

Тогда $V = \sqrt{2}ak |\sin(2kt)|$.

Закон движения $S(t)$ имеет вид $S = \sqrt{2}ak \int \sin(2kt) dt = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos(2kt) + C$.

Константу C определяем из условия $t = 0, S = 0$:

$$0 = -\frac{a\sqrt{2}}{2} + C; C = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $S = \frac{a\sqrt{2}}{2} [1 - \cos(2kt)]$.

Пример 4.3. Две точки M_1 и M_2 движутся в одном направлении по окружности радиусом $R = 18$ м. В начальный момент обе точки находились в одном положении: точка M_1 движется равноускоренно, начальная скорость ее равна нулю ($V_{10} = 0$); точка M_2 движется равномерно ($V_2 = 12$ м/с = const). Найти ускорения точек M_1 и M_2 через $S = 12$ м пути при условии, что первая точка догонит вторую.

Решение. Первая точка догонит вторую через промежуток времени $t = S/V_2 = 12/12 = 1$ с. Касательное ускорение и скорость первой точки через $t = 1$ с достигнут величин

$$W_{t1} = 2S/t^2 = 2 \cdot 12/1^2 = 24 \text{ м/с}^2;$$

$$V_1 = W_{t2} \cdot t = 24 \cdot 1 = 24 \text{ м/с}.$$

Тогда нормальное и полное ускорения найдем по формулам

$$W_{n1} = V_1^2/R = 24^2/18 = 32 \text{ м/с}^2;$$

$$W_1 = \sqrt{W_{n1}^2 + W_{t1}^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку вторая точка движется равномерно, касательная составляющая ее ускорения отсутствует ($W_{t2} = dV_2/dt = 0$), и полное ускорения равно величине нормальной составляющей:

$$W_2 = W_{n2} = V_2^2/R = 12^2/18 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Лекция 5. КИНЕМАТИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Основные виды движения твёрдого тела

а) Поступательное движение. При поступательном движении твёрдого тела всякая прямая, неизменно связанная с этим телом, остаётся параллельной своему начальному положению. Все точки твёрдого тела описывают одинаковые траектории и в каждый данный момент имеют одинаковые по направлению и модулю скорости и ускорения.

б) Вращательное движение. Тело движется так, что две какие-нибудь его точки остаются неподвижными (рис. 5.1).

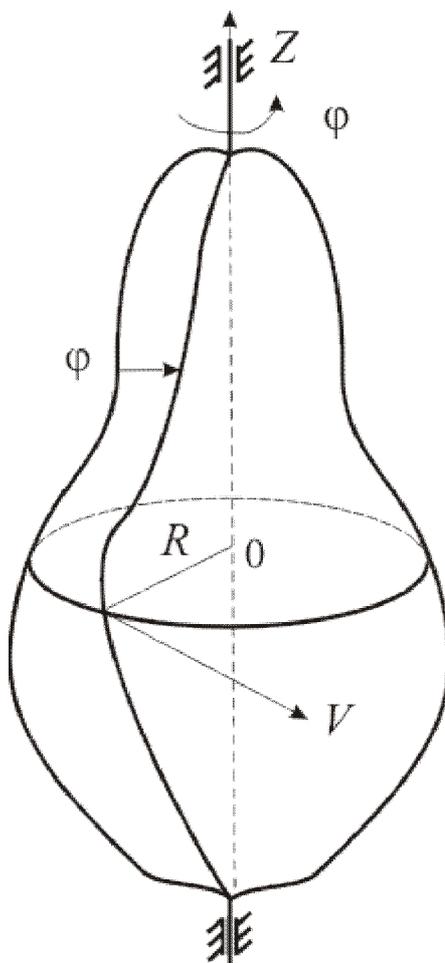


Рис. 5.1 Вращательное движение тела

Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения.

закон вращательного движения твёрдого тела;

—

угловая скорость тела;

— —

угловое ускорение.

При равномерном вращении ($\omega = \text{const}$):

Если тело делает n оборотов в минуту, то — .

При $\varepsilon = \text{const}$ вращение тела называют равномерно переменным:

—

—

—

Определим скорость и ускорение произвольной точки вращающегося тела (рис. 5.2).

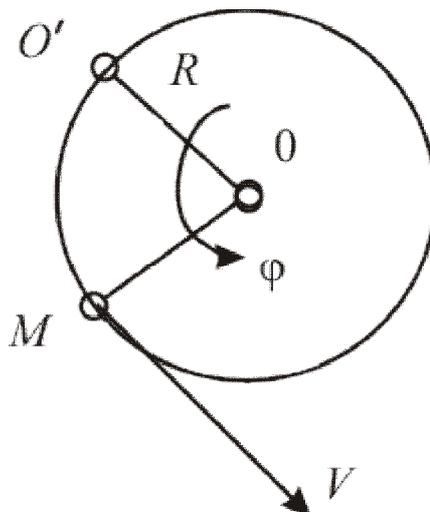


Рис. 5.2 Движение произвольной точки вращающегося тела

Обозначим R радиус окружности, описываемой точкой тела при вращении, S – длина дуги этой же этой же окружности при повороте тела на угол φ . Тогда

$$S = R\varphi$$

где V – линейная скорость точки M , вектор скорости направлен по касательной к окружности.

Касательное ускорение (рис. 5.3)

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}$$

Нормальное ускорение (рис. 5.3)

$$W_n = \frac{V^2}{R}$$

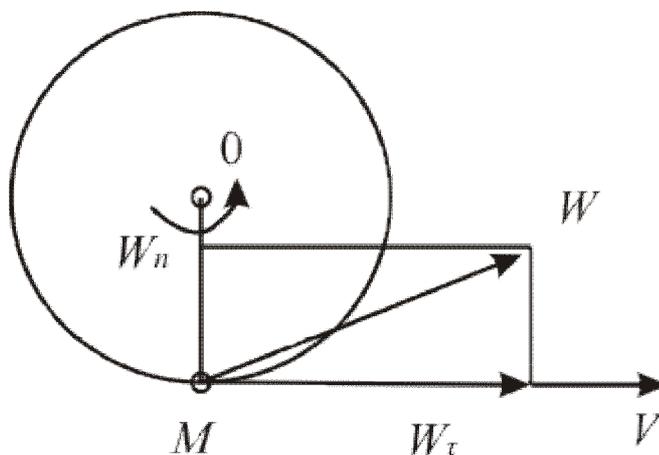


Рис. 5.3 Ускорение W произвольной точки вращающегося тела

Нормальное ускорение W_n всегда направлено по радиусу окружности, описываемой точкой M , к центру этой окружности. Это ускорение, поэтому называют центростремительным.

Модуль полного ускорения находят по формуле

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

При $\omega = \text{const}$, $W = R \omega^2$, $\alpha = 0$.

Понятие о сложном движении точки

Наблюдаем движение точки относительно системы отсчёта $O'x'y'z'$, которая движется относительно системы O_{xyz} , принимаемой за неподвижную. Движение по отношению к $O'x'y'z'$ называют относительным, а движение самих осей $O'x'y'z'$ по отношению к O_{xyz} – переносным.

В соответствии с этим различают относительные, переносные и абсолютные скорости и ускорения точки.

Абсолютные скорость V_a и ускорение W_a точки определяют в её движении относительно неподвижной системы координат. Относительные V_r и W_r – по отношению к подвижной системе координат.

Переносная скорость точки M – это та скорость, которую имела бы эта точка в данный момент, если бы она была неизменно связана с подвижной системой координат. Аналогично скорость и ускорение обозначают V_e и W_e . AB – траектория движения точки M относительно осей $Ox'y'$ (рис. 5.4), которые вращаются относительно точки O с угловой скоростью ω .

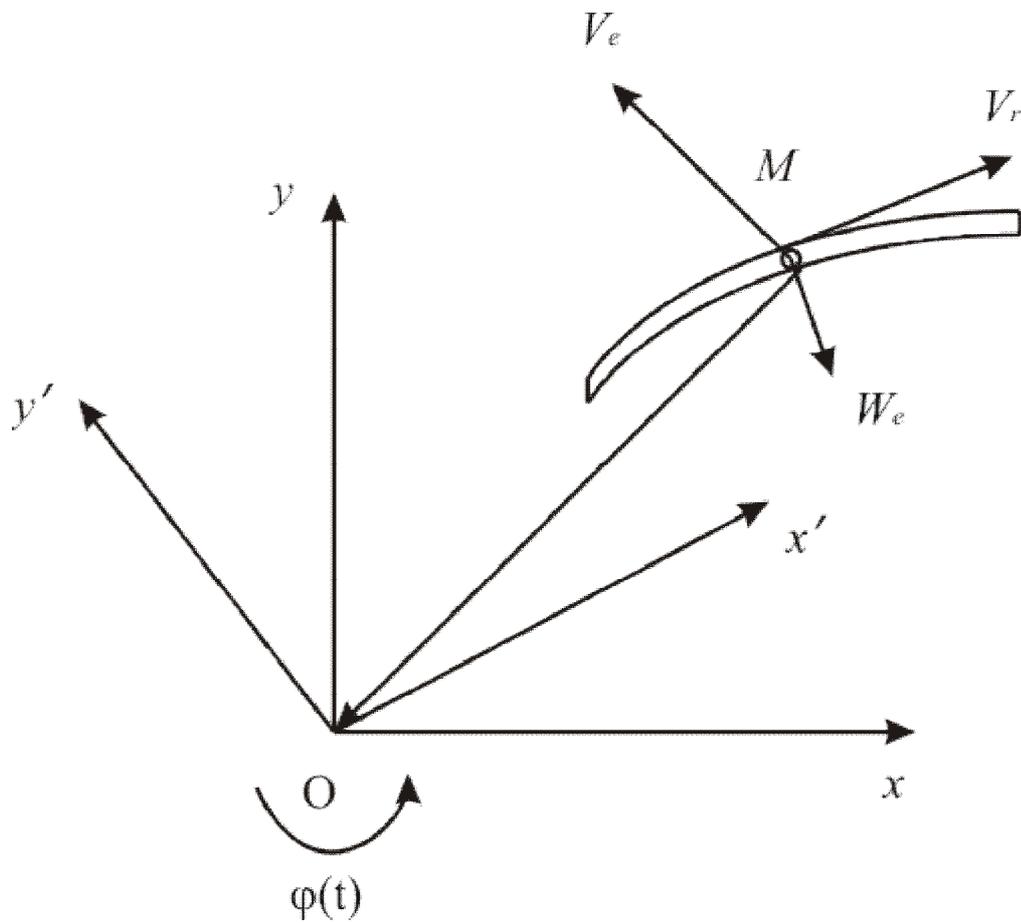


Рис. 5.4 Сложное движение точки

Тогда

где $\varphi(t)$ – закон движения в системе $Ox'y'$. Скорость движения относительно V_a определяется векторной суммой:

Переносное ускорение a_{pe} – ускорение во вращательном движении:

а абсолютное ускорение, как и скорость, определяется векторной суммой:

Закон движения в системе координат $Ox'y'$ задан в виде

Тогда проекции относительной скорости на координатные оси определяются следующим образом:

или

Аналогично для ускорения

или

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости, называется плоскопараллельным. Пример: качение ролика по неподвижной направляющей, движение шатуна кривошипно-шатунного механизма.

Изучение плоскопараллельного движения сводится к изучению движения плоской фигуры, полученной сечением тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости. Плоская фигура при этом движется в своей плоскости.

Движение плоской фигуры задано, если определены функции (рис. 5.5).

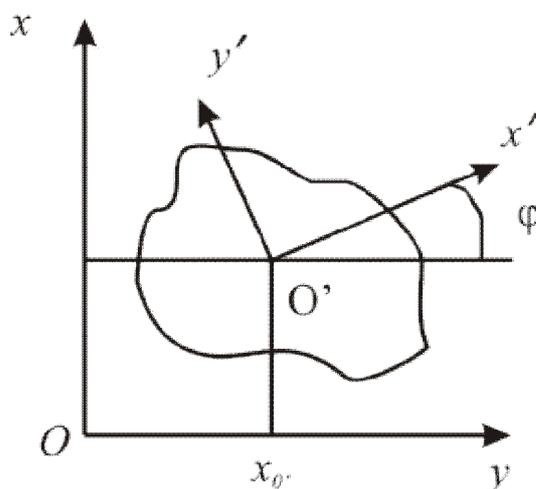


Рис. 5.5 Плоскопараллельное движение твёрдого тела

Эти функции называют уравнениями движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости.

Плоскопараллельное движение можно разложить на поступательное и вращательное. Выберем произвольную точку тела (рис. 5.6).

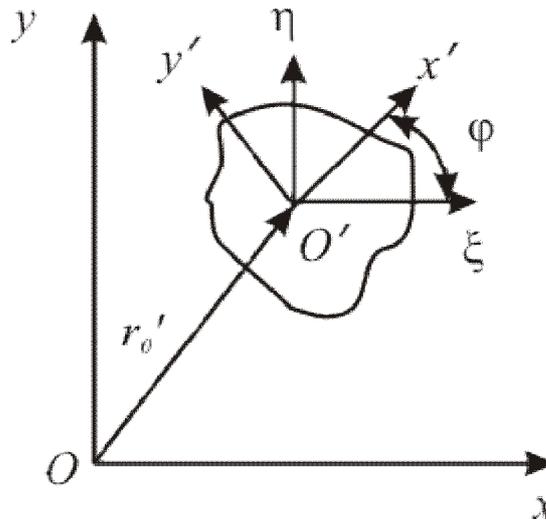


Рис. 5.6 Разложение плоскопараллельного движения на поступательное (оси $O'\xi\eta$) и вращательное (вокруг точки O)

Система осей $O'\xi\eta$ совершает поступательное движение, так как оси ξ и η всегда параллельны осям x и y . Угол определяется положением фигуры относительно осей x, y , т.е. происходит вращательное движение.

—

Переносное движение – поступательное:

— — —

Иначе

Используя формулы преобразования координат

и

найдем скорость произвольной точки тела M :

— — —
— — —

или

Координаты мгновенного центра скоростей, т.е. (x_{cv}, y_{cv}) , имеющего находим по формулам

Аналогичные процедуры можно выполнить для ускорений.

Примеры к разделу 5

Пример 5.1. Определить ускорение точки M шкива, вращающегося вокруг горизонтальной оси O под действием груза, прикреплённого к гибкой ленте, навёрнутой на шкив (рис. 5.7).

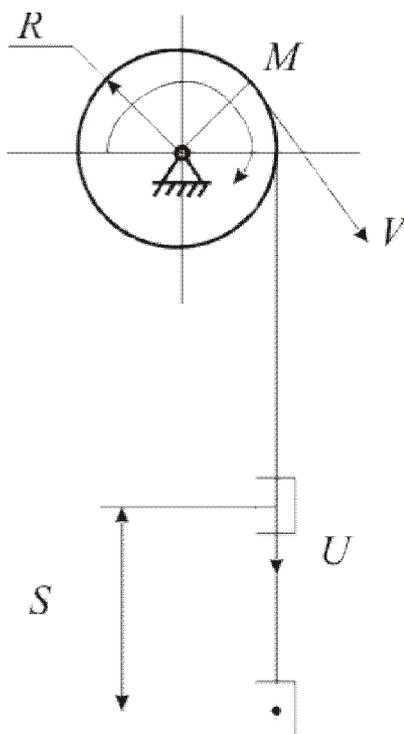


Рис. 5.7 Вращение шкива под действием груза

Закон движения груза:

(расчёт выполнить для двух моментов времени: с).

Решение. Абсолютные скорости точки $M(V)$ и груза (U) равны.

Поскольку

$$U = \frac{dS}{dt} = at,$$

то и $V = U = at$.

Касательное W_τ и нормальное W_n ускорение во вращательном движении находят по формулам

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = a;$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{a^2 t^2}{R}.$$

Ускорение точки M равно

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = a \sqrt{1 + \frac{a^2 t^4}{R^2}}.$$

В момент времени $t_1 = 0$ $W = a = 2 \text{ м/с}^2$, а в момент времени $t_2 = 10 \text{ с}$

$$W = 2 \sqrt{1 + \frac{2^2 \cdot 10^4}{(20)^2}} = 2 \cdot 10^2 \text{ м/с}^2.$$

Пример 5.2. Круглый диск диаметром d равномерно вращается с частотой вращения n оборотов в минуту, а затем останавливается вследствие трения в подшипниках через N оборотов. Определить скорость и ускорение точек, лежащих на окружности диска, при равномерном вращении и при торможении, считая движение при этом равномерно замедленным. В расчётах принять: $d = 100 \text{ мм}$; $n = 200$ об/мин; $N = 20$ оборотов.

Решение. При равномерном вращении скорость $V = R\omega$, а угловое ускорение $\varepsilon = 0$. Следовательно, ускорение

$$W = R\omega^2.$$

Угловая скорость ω связана с частотой вращения следующим образом:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Поскольку $R = d/2$, то

$$V = \frac{\pi d n}{60} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 200}{60} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ мм/с};$$

$$W = \frac{d \pi^2 n^2}{2 \cdot 30^2} = \frac{100 \cdot \pi^2 \cdot 200^2}{2 \cdot 30^2} = 2,19 \cdot 10^4 \text{ мм/с}^2.$$

При равномерно замедленном вращении угловое ускорение $\varepsilon = \text{const}$. Поскольку в момент остановки $\omega = 0$, то

где ω - угловая скорость при равномерном вращении (—)

От начала торможения до остановки диск совершает N оборотов, следовательно,
но,

Тогда из последних двух уравнений получим

Пример 5.3. При вращении твёрдого тела векторы скоростей двух его точек A и B параллельны, направлены в одну сторону и перпендикулярны прямой AB (рис. 5.8).

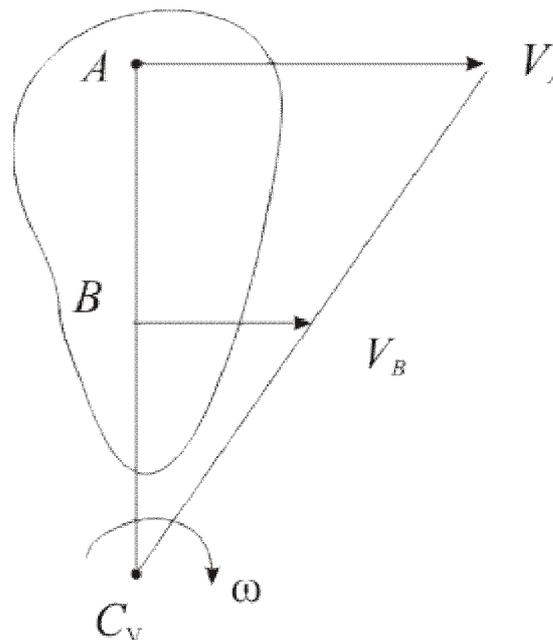


Рис. 5.8 Вращение твёрдого тела (C_V — мгновенный центр вращения)

Определить мгновенный центр вращения и угловую скорость вращения тела
вокруг этого центра, если

Решение. Поскольку центр вращения и точки A и B лежат на одной прямой, то
положение этого центра находится из пропорции

$$\frac{AC_v}{BC_v} = \frac{V_a}{V_b}.$$

Отсюда, учитывая, что $BC_v = AC_v - l$, находим

$$AC_v = \frac{V_a}{V_a - V_b} l = \frac{10}{10 - 5} \cdot 200 = 400 \text{ мм.}$$

Угловую скорость вращения ω находим из равенства

$$V_a = AC_v \omega,$$

или

$$\omega = \frac{V_a}{AC_v} = \frac{10}{400} = 0,025 \text{ с}^{-1}.$$

Лекция 6. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЁРДОГО ТЕЛА

Основные законы динамики

Выделяют две задачи динамики:

- зная законы движения, найти силы, действующие на точку или на систему;
- зная силы, действующие на точку или систему, определить движение этой точки или этой системы.

Количественные соотношения между различными физическими величинами устанавливаются основными законами динамики, впервые точно сформулированные Ньютоном.

Рассмотрим основные из них.

1. Если $F = \mathbf{0}$, то $V = const$;
2. $F = mW$; $W = F/m$; $m = F/W$; $m = p/g$;

$$W = \frac{dV}{dt}; F = \frac{d}{dt}(mV),$$

где mV – количество движения.

3. Закон равенства действия и противодействия:

$$F = mW; F' = m'W'; mW = m'W';$$

$$\frac{W}{W'} = \frac{m'}{m}.$$

4. Закон независимости действия сил:

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n;$$

$$F_1 = m_1W_1; F_2 = mW_2, \dots, F_n = mW_n;$$

$$R = mW; R = m(W_1 + W_2 + \dots + W_n);$$

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

На основании законов динамики устанавливаются дифференциальные уравнения движения. Для материальной точки они имеют вид

$$F = mW; X = mW_x; Y = mW_y; Z = mW_z;$$

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2}; W_y = \frac{d^2y}{dt^2}; W_z = \frac{d^2z}{dt^2};$$

Зная законы движения — — — определяют силы, действующие на тело: X, Y, Z . Или наоборот, по известным X, Y, Z находят законы

Если $Y=0, Z=0$, то движение является прямолинейным:

В общем случае .

Основные теоремы динамики

а) Теорема о количестве движения.

То есть дифференциал количества движения равен элементарному импульсу действующей на эту точку силы.

б) Теорема о моменте количества движения.

По аналогии с моментом силы — — — момент количества движения (рис. 6.1).

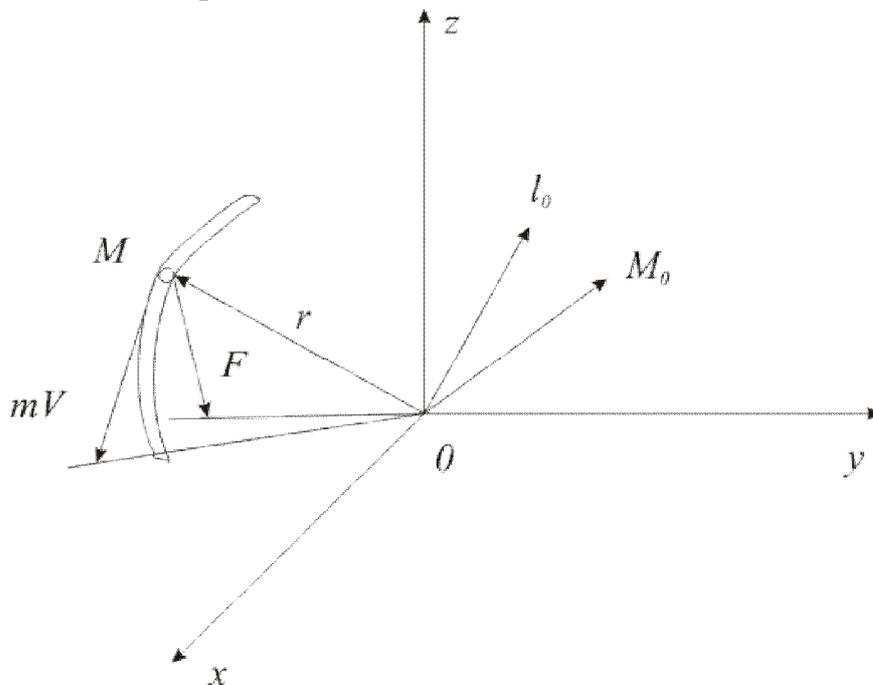


Рис. 6.1 Момент количества движения l_0 и его производная M_0

Продифференцировав последнее выражение по t , получим

$$\frac{d}{dt} m_0(mV) = \frac{d}{dt} (r \cdot mV) = \frac{dr}{dt} \cdot mV + r \cdot \frac{d}{dt} (mV);$$
$$\frac{dr}{dt} = V; \quad \frac{d}{dt} (mV) = F,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} m_0(mV) = V \cdot mV + r \cdot F.$$

Поскольку векторы V и mV лежат на одной прямой, то $V \cdot mV = 0$.

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} m_0(mV) = m_0(F).$$

Иначе

$$\frac{dl_0}{dt} = m;$$

в) Теорема о кинетической энергии материальной точки $mV^2/2$.

Проектируя векторное равенство $F=mV$ на направление скорости, получим

$$mW_V = F_V; \quad W_V = \frac{dV}{dt} \quad (\text{из кинематики});$$
$$F_V = F \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами F и V ,

тогда $m \frac{dV}{dt} = F \cos \varphi$.

Умножив обе части равенства на Vdt , получим

$$VmdV = FV \cos \varphi dt$$

или $d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = FV \cos \varphi dt$ - скалярное произведение силы на дифференциал радиуса вектора точки приложения этой силы.

Поскольку

$$FV \cos \varphi = \vec{F} \cdot \vec{V}; \quad V = \frac{dr}{dt},$$

где Fdr – элементарная работа, то

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = Fdr.$$

г) Закон сохранения энергии.

Потенциальная энергия Π равна работе, производимой силой поля при перемещении материальной точки из заданного положения M в нулевую точку:

$$\Pi = U^{(0)} - U,$$

где $U^{(0)}$ - величина постоянная.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поскольку для потенциального поля

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad \mathbf{Z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Для кинетической энергии $\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} = A$, но $A = U_2 - U_1$,

тогда

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2;$$

$$\frac{mV_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{mV_2^2}{2} + \Pi_2; \quad \frac{mV^2}{2} + \Pi = const.$$

Принцип Даламбера для материальной точки и для системы

Пусть M – несвободная материальная точка; F – действующая на неё сила; N - реакция связи; R – равнодействующая F и N (рис. 6.2).

Согласно второму закону динамики $R = mW$, $F_{\text{ин}} = -mW$. Поскольку $R = F + N$, то

$$F + N + F_{\text{ин}} = \mathbf{0}.$$

Принцип Даламбера заключается в следующем: при движении материальной точки в каждый момент заданная сила F , реакция связи N и сила инерции $F_{\text{ин}}$ взаимно уравновешиваются.

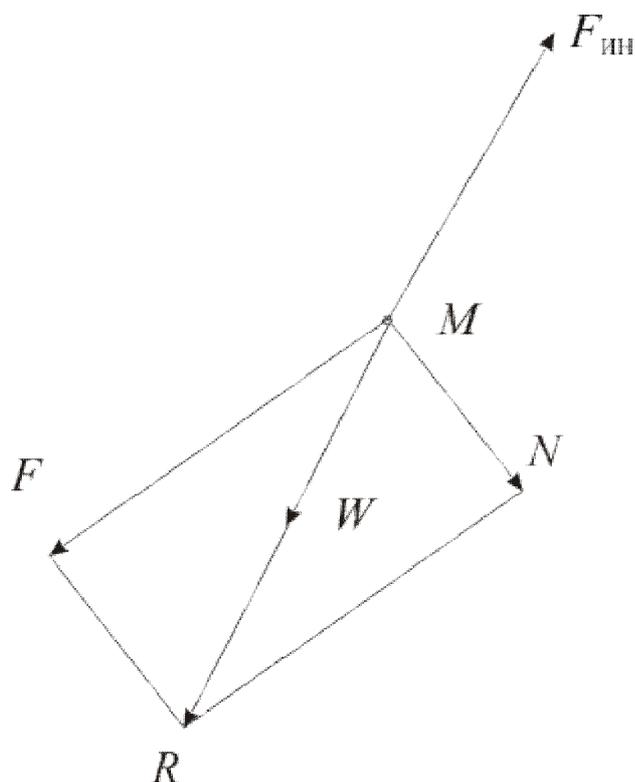


Рис. 6.2 Силы, действующие на несвободную материальную точку

Этот принцип легко распространить на систему, если рассматривать какую-нибудь точку системы . На неё действует заданная сила и реакция связей ; эти силы уравниваются силой инерции , т.е.

Введение сил инерции позволяет задачи динамики решать в той же форме, как это делали для задач статики.

Общие теоремы динамики системы

а) Уравнение движения системы в общем виде.

Система – совокупность материальных точек, известным образом связанных между собой так, что движение каждой точки не является независимым от движения остальных точек.

Для какой-нибудь точки системы, имеющей массу m_k

где - равнодействующая всех внешних сил, приложенных к этой точке; - равнодействующая всех внутренних сил.

б) Теорема о количестве движения системы.

Уравнение движения отдельной точки системы запишем в виде

$$m_k \frac{dV_k}{dt} = F_{ek} + F_{ik}$$

или

$$\frac{d}{dt} (m_k V_k) = F_{ek} + F_{ik}.$$

Сложив уравнения для n точек системы, получим

$$\sum \frac{d}{dt} (mV) = \sum F_e + \sum F_i.$$

Обозначим равнодействующую внешних сил $\sum F_e = R_e$, $\sum F_i = 0$;

так как это внутренние силы, кроме того,

$$\sum \frac{d}{dt} (mV) = \frac{d}{dt} \sum (mV),$$

где $\sum (mV) = k$ – количество движения данной системы. Тогда

$$\frac{dk}{dt} = R_e$$

представляет собой теорему о количестве движения.

в) Теорема импульсов.

Следствием из предыдущей теоремы является

$$dk = R_e dt = \sum F_e dt$$

или

$$k - k_0 = \sum \int_0^t F_e dt = \sum S_e,$$

где S_e – импульс внешней силы.

г) Теорема о движении центра масс системы.

Из статики известно:

$$\sum mx = Mx_e; \quad \sum my = My_e; \quad \sum mz = Mz_e,$$

где m – масса материальной точки; x, y, z – её координаты; M – масса всей системы;

x_e, y_e, z_e – координаты его центра тяжести.

Продифференцировав эти выражения, получим

$$\sum m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_e}{dt} \text{ и т. д.}$$

Тогда

$$\begin{aligned}MV_{ex} &= \sum mV_x; \quad MV_{ey} = \sum mV_y, \dots ; \\MV_{ex} &= k_x; \quad MV_{ey} = k_y; \quad MV_{ez} = k_z; \\MV_e &= k = \sum mV ,\end{aligned}$$

где k – количество движения всей системы.

$$M \frac{dV_e}{dt} = \frac{dk}{dt} .$$

Ранее показано, что $\frac{dk}{dt} = R_e$, следовательно,

$$MV_e = R_e = \sum F_e ,$$

это выражение и представляет собой теорему о количестве движения.

д) Теорема о кинетическом моменте системы.

Для материальной точки

$$\frac{d}{dt} m_0 (m_k V_k) = m_0 (F_{ek}) + m_0 (F_{ik}) .$$

Для всех точек системы

$$\sum \frac{d}{dt} m_0 (mV) = \sum m_0 (F_e) + \sum m_0 (F_i) .$$

Поскольку

$$\sum m_0 (F_i) = \mathbf{0}, \quad \text{то} \quad \frac{d}{dt} \sum m_0 (mV) = \sum m_0 (F_e) ,$$

иначе

$$\frac{dL_0}{dt} = m_0^e ,$$

где L_0 – главный момент количества движения материальных точек системы относительно центра O – называют кинетическим моментом системы относительно этого центра O .

Для вращающегося тела с поперечной осью z имеем (рис. 6.3)

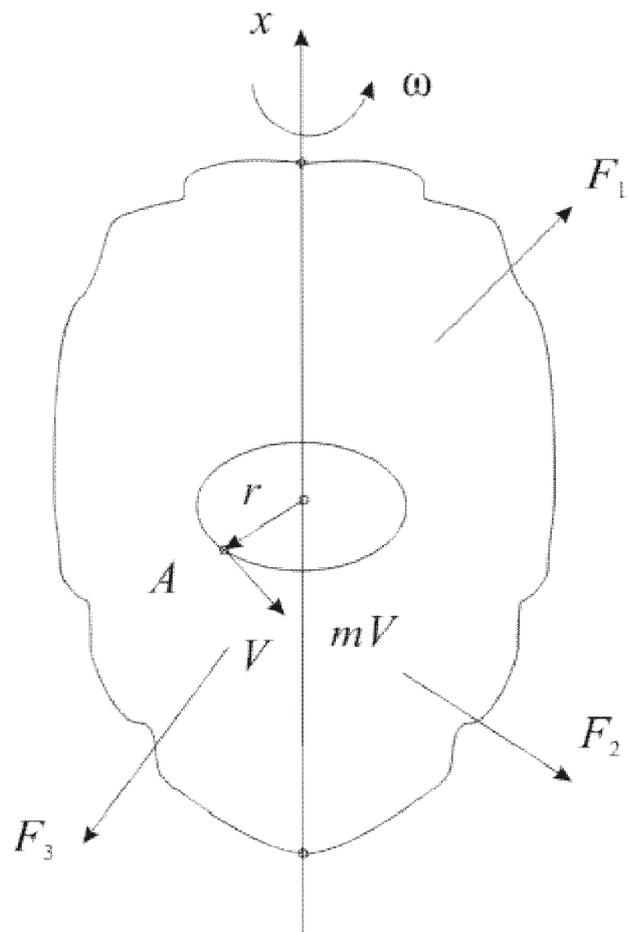


Рис. 6.3 Вращение произвольного тела

где I_z – момент инерции тела относительно оси z .

$$M_z = \sum_{i=1}^n F_i r_i \sin \alpha_i$$

Где M_z – главный момент приложенных к телу сил относительно оси z ; I_z – мера инертности тела при его вращательном движении вокруг данной оси.

Примеры к разделу 6

Пример 6.1. Транспортная тележка загрузочного устройства имеет массу m и движется по прямолинейной горизонтальной направляющей со скоростью V_0 . Определить путь, который пройдёт тележка от момента начала торможения до полной остановки, если коэффициент трения равен f . Расчёт выполнить для следующих условий:

Решение. Согласно теореме о кинетической энергии

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = A_{\text{тр}}$$

где v – конечная скорость тела; $A_{\text{тр}}$ – работа силы, приложенной к телу.

Поскольку сила сопротивления направлена противоположно скорости тележки, то

где s – путь торможения.

В момент остановки $v = 0$. Следовательно

$$-\frac{1}{2} m V_0^2 = -f m g s$$

или

$$s = \frac{V_0^2}{2f g}$$

Пример 6.2. Тело падает с высоты H на землю (рис. 6.4).

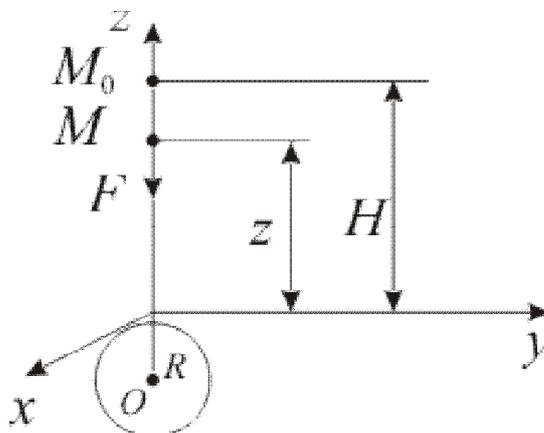


Рис. 6.4 Падение тела M_0 на поверхность земли

Определить его скорость в момент касания земли, если сопротивление воздуха отсутствует, $H = 2000$ м, радиус Земли $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Решение. Предположим, что при падении силу притяжения тела нельзя считать постоянной, т.е.

$$F = \frac{km}{r^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности; m – масса тела; r – расстояние от тела до центра земли.

Поскольку у поверхности земли $F = mg$, то

$$k = gR^2.$$

Элементарная работа силы, с которой тело притягивается землей, равна

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz,$$

где X, Y, Z – проекции силы F на оси координат x, y, z (см. рис. 57); $X = Y = 0$;

$$Z = -\frac{km}{(R+M)^2}.$$

Тогда

$$A = -km \int_M^0 \frac{dz}{(R+Z)^2} = km \left| \frac{1}{R+Z} \right|_M^0 = \frac{kmH}{R(R+H)},$$

или

$$A = \frac{mgHR}{R+H}.$$

Учитывая, что

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mgHR}{R+H},$$

получим

$$V = \sqrt{\frac{2gHR}{R+H}} = \sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{R}}}.$$

Знаменатель в формуле следует учитывать при достаточно больших H . В нашем примере $H \ll R$, поэтому используем хорошо известную формулу

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^3} = 198,1 \text{ м/с}.$$

Пример 6.3. Материальная точка, имеющая вес P , закреплена на гибкой ленте длиной l (рис. 58). Из положения M_0 (нить отклонена на угол φ_0) точка начинает

движение вниз без начальной скорости. Определить максимальную силу натяжения нити, если $P = 2H, l = 200$ мм, $\varphi_0 = 60^\circ$.

Р е ш е н и е. В произвольный момент движения на точку действует сила тяжести P , сила натяжения N , центробежная $F_n^{\text{ин}}$ и касательная $F_\tau^{\text{ин}}$ силы инерции. Согласно принципу Даламбера эта система сил является взаимно уравновешенной.

Спроектировав все силы на направление OM , получим

$$F_n^{\text{ин}} + P \cos \varphi - N = 0,$$

или

$$N = F_n^{\text{ин}} + P \cos \varphi,$$

где

$$F_n^{\text{ин}} = \frac{mV^2}{l}.$$

По теореме о кинетической энергии имеем

$$\frac{mV^2}{l} = Ph,$$

где $h = l(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$. Тогда $mV^2 = 2Pl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ и $F_n^{\text{ин}} = 2P(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$.

Следовательно,

$$N = 2P(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + P \cos \varphi = P(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0) = 2(3 \cos \varphi - 2 \cos 60^\circ) = 2(3 \cos \varphi - 1). \text{ При } \varphi = 0, N = N_{\text{max}} = 4H.$$

Лекция 7. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Уравнения движения свободного, твердого тела в общем случае. Разложение движения твердого тела на поступательное движение и движение вокруг некоторой точки

Свободное твердое тело может получать любое перемещение в пространстве. Примером свободного тела является тело, свободно брошенное в пространстве. Рассмотрим движение этого тела, используя три системы отсчета (рис. 7.1):

$Oxyz$ – система неподвижных осей координат;

$O'x'y'z'$ – система подвижных осей координат, неизменно связанная с рассматриваемым телом;

$O'\xi\eta\zeta$ – система подвижных осей координат, связанная с рассматриваемым телом и имеющая неизменное направление, параллельное неподвижным осям x , y и z .

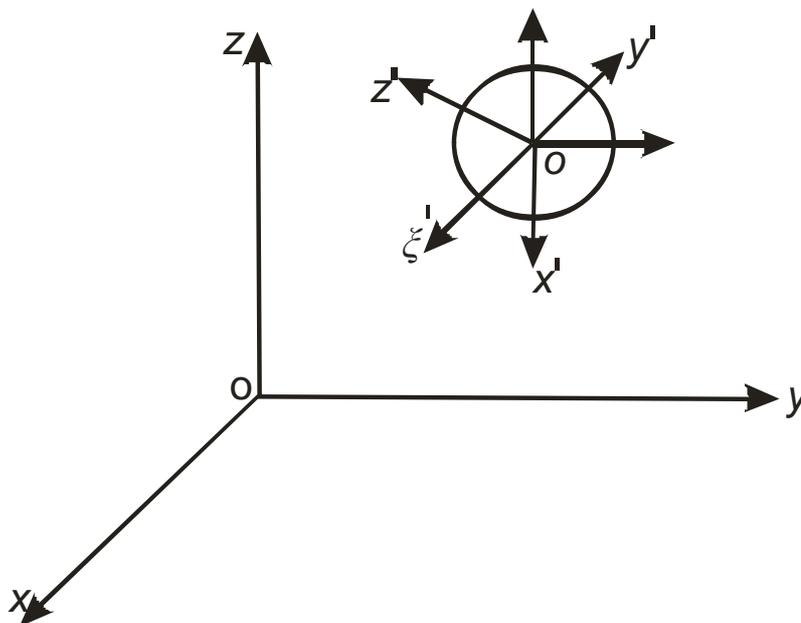


Рис.7.1

Положение тела полностью определено, если известно положение осей координат $O'x'y'z'$, неизменно связанных с ним. Для этого должны быть известны координаты точки $O' - x', y'_0, z'_0$ – и положение осей системы $O'\xi\eta\zeta$ относительно осей системы $O'x'y'z'$, которое задается тремя эйлеровыми углами – ψ, θ и φ . Та-

ким образом, положение свободного тела в пространстве задается шестью параметрами: тремя линейными и тремя угловыми.

При движении свободного твердого тела в общем случае все шесть параметров являются функциями времени t :

$$\begin{aligned}x'_0 &= f_1(t); & y_0 &= f_2(t); & z_0 &= f_3(t); \\ \Psi &= f_4(t); & \theta &= f_5(t); & \varphi &= f_6(t),\end{aligned}$$

которые называют уравнениями движения свободного твердого тела в общем случае.

Первые три уравнения являются уравнениями переносного - поступательного движения осей координат $O'\xi\eta\zeta$, а последние три - уравнениями относительного движения тела вокруг точки O' .

Скорость переносного поступательного движения точки $O' - V'_0$ - имеет проекции на оси координат

$$\begin{aligned}V_{0,x} &= \frac{dx_{0'}}{dt} = f'_1(t); \\ V_{0,y} &= \frac{dy_{0'}}{dt} = f'_2(t); \\ V_{0,z} &= \frac{dz_{0'}}{dt} = f'_3(t).\end{aligned}$$

При относительном движении тела вокруг точки O' существует мгновенная ось, проходящая через эту точку, вокруг которой тело вращается с угловой скоростью. Поскольку система осей движется поступательно, то движение свободного тела в общем случае можно представить как качение без скольжения одного конуса по другому, который движется поступательно. Точка O' - общая вершина этих конусов, а вектор мгновенной угловой скорости ω направлен вдоль общей образующей конусов, по которой они контактируют.

Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки

Материальная точка, на которую наложены связи, называется несвободной. Примером несвободной материальной точки является точка, движущаяся по неподвижной поверхности под действием некоторой силы F (рис. 7.2).

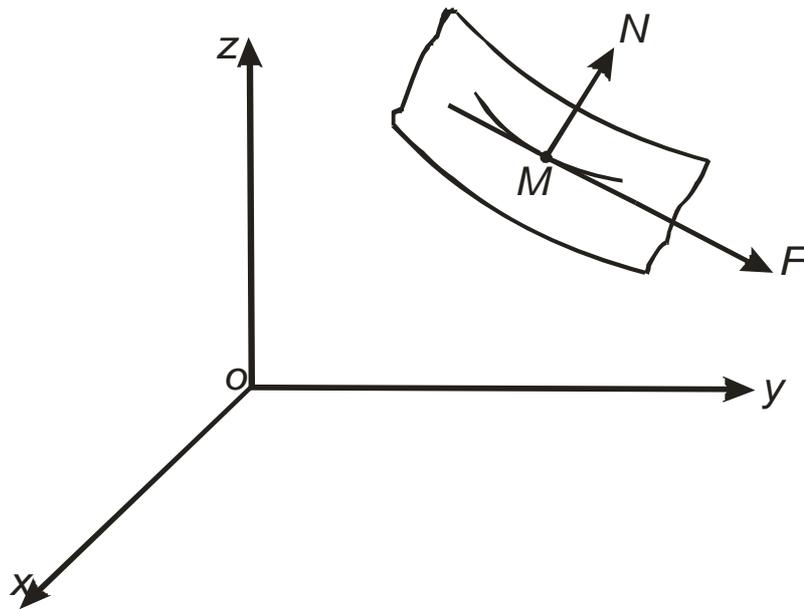


Рис. 7.2.

Уравнение этой поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

называется уравнением связи.

При условии отсутствия трения на основании второго закона Ньютона векторное уравнение движения имеет вид

$$mW = F + N,$$

где N – реакция поверхности.

Соответственно дифференциальные уравнения движения представляются следующим образом:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x;$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y;$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z,$$

где X, Y, Z и N_x, N_y, N_z – соответствующие проекции сил F и N .

После преобразований последние уравнения могут быть представлены в форме Лагранжа:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx};$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy};$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz},$$

где $\lambda = \frac{N}{\Delta f}$ – множитель Лагранжа;

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Аналогичные уравнения, записанные относительно **естественных** осей координат, называются уравнениями движения в форме Эйлера (нами не рассматриваются).

При действии сил трения дифференциальные уравнения движения принимают вид;

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + N_x + F_x^{TP};$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N_y + F_y^{TP};$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N_z + F_z^{TP}.$$

Используя выражения для проекций сил, уравнения записываются следующим образом:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda \frac{df}{dx} - \frac{F^{TP}}{V} \frac{dx}{dt};$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{df}{dy} - \frac{F^{TP}}{V} \frac{dy}{dt};$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{df}{dz} - \frac{F^{TP}}{V} \frac{dz}{dt};$$

Дополняя эти три уравнения уравнением связи $f(x, y, z) = 0$ и уравнением, выражающим закон Кулона, $F^{TP} = fN$, где f – коэффициент трения, получаем замкнутую систему уравнений относительно неизвестных x, y, z, N, F^{TP} .

Теорема Кориолиса

Согласно теореме сложения скоростей абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки;

$$V_a = V_e + V_r,$$

где V_a, V_e, V_r – соответственно абсолютная, переносная и относительная скорости этой точки.

Абсолютное ускорение равно

$$W_a = \frac{dV_a}{dt} = \frac{dV_e}{dt} + \frac{dV_r}{dt'},$$

где

$$\frac{dV_e}{dt} = W_e + \omega \cdot V_r,$$

$$\frac{dV_r}{dt} = W_r + \omega \cdot V_r',$$

W_e – переносное ускорение; W_r – относительное ускорение; ω – мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг мгновенной оси.

Иначе

$$W_a = W_e + W_r + 2\omega \cdot V_r.$$

Последнее слагаемое представляет собой ускорение Кориолиса

$$W_k = 2\omega \cdot V_r,$$

которое равно удвоенному векторному произведению угловой скорости твердого тела, с которым связана подвижная система отсчета, на скорость точки относительно этой системы отсчета.

Согласно правилам векторного произведения модуль и направление вектора ускорения Кориолиса определяются следующим образом (рис. 7.3): модуль W_k равен

$$|W_k| = 2\omega V_r \sin \theta,$$

а сам вектор W_k направлен по перпендикуляру к плоскости, образуемой векторами ω и V_r в сторону, определяемую правилом правого винта.

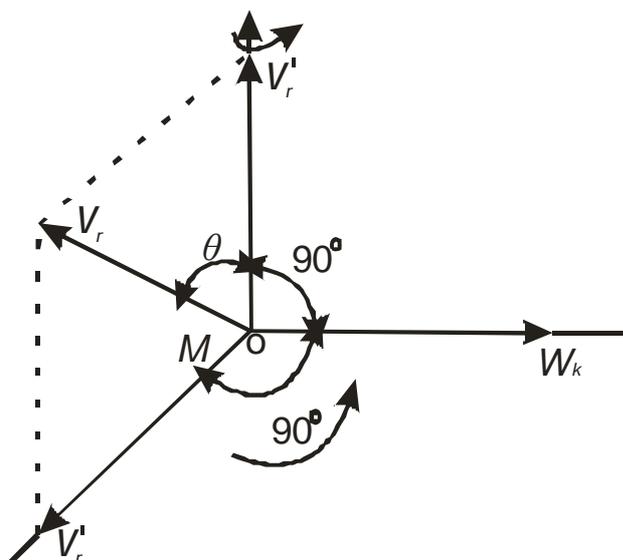


Рис.7.3

Выражение для полного ускорения можно записать в виде

$$W_a = W_e + W_r + W_k',$$

который выражает теорему Кориолиса: в том случае, когда переносное движение не является поступательным, абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова.

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

Определим уравнения движения точки M относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, движущейся известным образом относительно неподвижной системы координат $Oxyz$.

При движении материальной точки относительно неподвижной системы отсчета

$$mW = F + N,$$

где W – абсолютное ускорение точки M ; F – действующая на эту точку заданная сила; N – реакция связей.

Поскольку

$$W = W_r + W_e + W_k,$$

где W_r, W_e, W_k – соответственно относительное, переносное и кориолисово ускорение точки M , то

$$mW_r = F + N - mW_e - mW_k,$$

где mW_e – переносная сила инерции; mW_k – кориолисова сила инерции;

$$-mW_e = F_e^{\text{ин}}; \quad mW_k = F_k^{\text{ин}}.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$mW_r = F + N + F_e^{\text{ин}} + F_k^{\text{ин}}.$$

Это уравнение является векторным уравнением относительного движения материальной точки.

Проектируя это уравнение на оси системы $O_1x_1y_1z_1$ и принимая во внимание то, что

$$W_{rx_1} = m \frac{d^2x_1}{dt^2}; \quad W_{ry_1} = \frac{d^2y_1}{dt^2}; \quad W_{rz_1} = \frac{d^2z_1}{dt^2},$$

дифференциальные уравнение относительного движения получаем в виде

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = x_1 + N_{x_1} + F_{ex_1}^{\text{ин}} + F_{kx_1}^{\text{ин}};$$

$$m \frac{d^2y_1}{dt^2} = y_1 + N_{y_1} + F_{ey_1}^{\text{ин}} + F_{ky_1}^{\text{ин}};$$

$$m \frac{d^2z_1}{dt^2} = z_1 + N_{z_1} + F_{ez_1}^{\text{ин}} + F_{kz_1}^{\text{ин}};$$

Таким образом, относительно подвижных осей координат материальная точка движется так же, как если бы эти оси были неподвижны, а к точке, кроме действующих на нее сил, были приложены дополнительные силы $F_e^{\text{ин}}$ и $F_k^{\text{ин}}$.

Пример к разделу 7

Определить абсолютное ускорение точки M , движущейся с постоянной по модулю относительной скоростью V_r вдоль меридиана, если шар радиуса V_r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z (рис. 7.4).

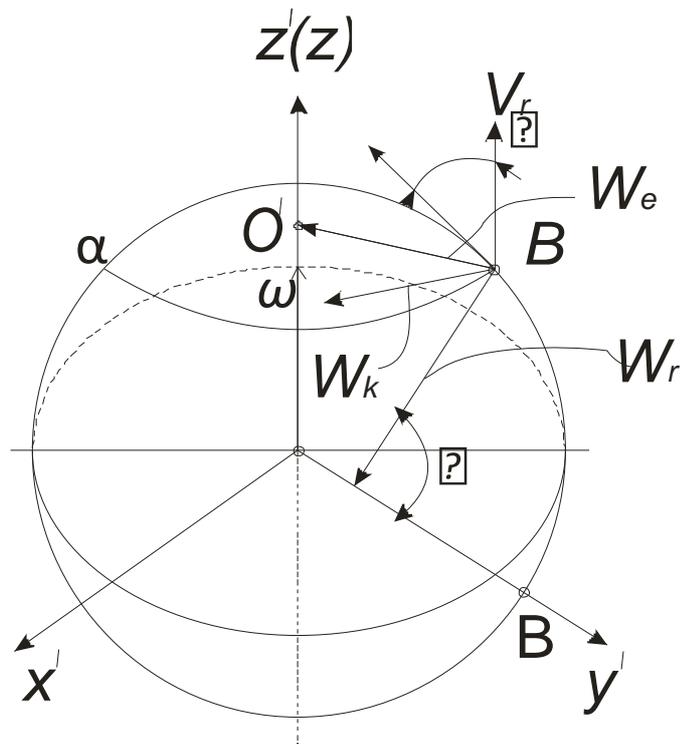


Рис.7.4

В расчетах принять: $R=300$ мм, $\omega = 0,5$ с, $V_r = 20$ м/с, широта точки в данный момент $\varphi = 60^\circ$.

Решение. Абсолютное ускорение при сложном движении точки W представляет собой сумму трех слагаемых:

$$W_a = W_e + W_r + W_k,$$

где W_e –переносное ускорение; W_r –относительное ускорение; W_k –кориолисово ускорение.

Переносное движение представляет собой вращение вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, поэтому

$$W_e = r\omega^2,$$

где r - радиус до оси вращения, а так как $r = O_1M = R \cos \varphi$, то

$$W_e = R \cos \varphi \omega^2.$$

Вектор W_e направлен к оси вращения.

Относительное движение происходит по окружности радиуса R с постоянной по модулю со скоростью V_r , поэтому

$$W_r = \frac{V_r^2}{R},$$

а вектор W_r направлен по радиусу MO .

Вектор кориолисова ускорения W_k направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы ω и V_r , по касательной к параллели ab (следовательно, перпендикулярен меридиальной плоскости AB). Модуль вектора W_k определяется по формуле

$$W_k = 2V_r\omega \sin \varphi .$$

Проекция абсолютного ускорения на оси координат равна сумме проекций векторов W_e, W_r, W_k на те же оси $x'y'z'$;

$$W_{ax'} = W_{ex'} + W_{rx'} + W_{kx'};$$

$$W_{ay'} = W_{ey'} + W_{ry'} + W_{ky'};$$

$$W_{az'} = W_{ez'} + W_{rz'} + W_{kz'};$$

В свою очередь,

$$W_{ex'} = 0; W_{ey'} = -W_e = -R \cos \varphi \omega^2; W_{ez'} = 0;$$

$$W_{rx'} = 0; W_{ry'} = -W_r \cos \varphi = -\frac{V_r^2}{R} \cos \varphi; W_{rz'} = -W_r \sin \varphi = -\frac{V_r^2}{R} \sin \varphi;$$

$$W_{kx'} = W_k = 2V_r\omega \sin \varphi; W_{ky'} = 0; W_{kz'} = 0.$$

Тогда

$$W_{ax'} = 2V_r\omega \sin \varphi = 2 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot \sin 60^\circ = 17,32 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{ay'} = -\left(R\omega^2 + \frac{V_r^2}{R}\right) \cos \varphi = -\left(300 \cdot 0,5^2 + \frac{20^2}{300}\right) \cos 60^\circ = -38,17 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$W_{az'} = -\frac{V_r^2}{R} \sin \varphi = -\frac{20^2}{300} \sin 60^\circ = -1,15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Абсолютное ускорение равно

$$W_a = \sqrt{W_{ax'}^2 + W_{ay'}^2 + W_{az'}^2} = \sqrt{17,32^2 + 38,17^2 + 1,15^2} = 41,93 \text{ м/с}^2.$$

Лекция 8. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теорема о кинетической энергии материальной точки в относительном движении

Установлено, что дифференциальные уравнения движения точки относительно неподвижной системы отсчета и уравнения относительного движения отличаются тем, что в последние входят переносная и кориолисова силы инерции. Поскольку все общие теоремы динамики являются следствием уравнения движения, то и в теореме о кинетической энергии необходимо учитывать переносную и кориолисову силы инерции. В уравнения должны войти работы этих сил на относительном перемещении точки.

Ускорение Кориолиса $W_k \perp V_r$, поэтому и кориолисова сила инерции $F_k^{ин} \perp V_r$. Следовательно, работа этой силы в относительном движении равна нулю.

Уравнение теоремы о кинетической энергии имеет следующий вид:

$$d\left(\frac{mV_r^2}{2}\right) = (X_1 + F_{ex_1}^{ин})dx_1 + (Y_1 + F_{ey_1}^{ин})dy_1 + (Z_1 + F_{ez_1}^{ин})dz_1.$$

Правая часть этого выражения представляет собой элементарную работу внешних сил F и сил инерции $F_e^{ин}$ на относительном перемещении точки.

Принцип возможных перемещений

Рассмотрим без доказательства ряд положений. Совокупность материальных точек, известным образом связанных между собой так, что движение каждой точки не является независимым от движения остальных точек, называется механической системой материальных точек. Связи геометрического характера называются геометрическими. Они задаются в виде уравнений между координатами точек данной системы.

Для системы n материальных точек с $3n$ координатами имеем 5 уравнений связи:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0;$$

$$f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0;$$

.....

$$f_n(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Возможным перемещением данной системы называется всякое элементарное перемещение ее точек, допускаемое в данный момент наложенными на систему связями.

Если система представляет собой материальную точку, расположенную на некоторой поверхности

$$f(x, y, z) = 0,$$

то всякое элементарное перемещение, при котором точка остается на поверхности, является возможным перемещением. При этом удовлетворяется равенство

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0,$$

где $\delta x, \delta y, \delta z$ - вариации координат точки, представляющие собой изменения координат при ее возможном перемещении.

После преобразований получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$

Это равенство представляет собой скалярное произведение

$$n \cdot \delta r = 0$$

где n – единичный вектор (орт) нормали к поверхности в точке M , δr – вектор возможного перемещения точки.

Равенство скалярного произведения нулю означает, что векторы ортогональны, следовательно, вектор δr лежит в касательной плоскости. Таким образом, всякое элементарное перемещение точки, лежащее в касательной плоскости, является возможным.

Прежде чем сформулировать принцип возможных перемещений, дадим определение совершенным связям.

Связи называются совершенными, если сумма элементарных работ реакций связей при всяком возможном перемещении системы равна нулю. Таким свойством обладают геометрические связи без трения.

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. Дадим формулировку этого принципа без доказательства.

Для равновесия системы с совершенными связями в данном положении необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней

заданных сил при всяком возможном перемещении системы из этого положения равнялась нулю:

$$\sum \delta A_F = 0.$$

Это уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0,$$

где X_i, Y_i, Z_i – проекции сил, действующих на систему; $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – вариации координат точек системы.

Последнее уравнение называется общим уравнением статики.

Принцип Даламбера для системы

Распространим принцип Даламбера для одной материальной точки на систему материальных точек. На каждую точку этой системы действует заданная сила F_k , реакция связей N_k и сила инерции F_k^{IH} которые взаимно уравновешиваются.

Такое состояние справедливо для всех точек системы:

$$F_k + N_k + F_k^{IH} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, силы инерции, действующие на каждую материальную точку данной системы, уравновешиваются заданными силами и реакциями связей. Это положение и представляет собой принцип Даламбера для системы.

Моменты инерции

Различают моменты инерции системы материальных точек и тела, а также моменты инерции относительно оси и относительно центра. Момент инерции, системы материальных точек J относительно оси вычисляют по формуле

$$J = \sum m h^2,$$

где m – масса материальной точки; h – расстояние от точки до оси.

Момент инерции системы материальных точек относительно данной точки O (центра) вычисляют следующим образом:

$$J_0 = \sum m r^2,$$

где r - расстояние от точки до центра.

Момент инерции твердого тела, имеющего плотность γ , относительно оси J_z и относительно центра J_0 (начала координат) находят аналогичным образом (рис. 8.1):

$$J_z = \int_V \gamma h^2 dV$$

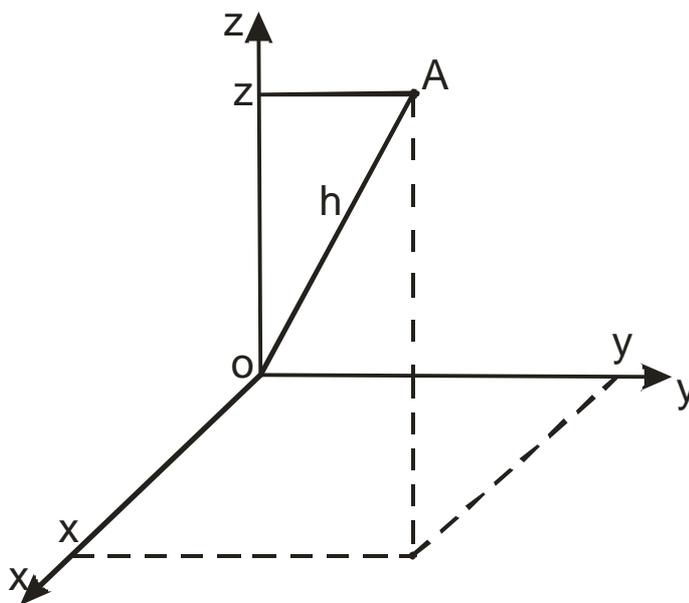


Рис. 8.1

Поскольку $h^2 = x^2 + y^2$, то

$$J_z = \int_V \gamma(x^2 + y^2) dV.$$

По аналогии

$$J_x = \int_V \gamma(y^2 + z^2) dV;$$

$$J_y = \int_V \gamma(x^2 + z^2) dV.$$

Момент инерции тела относительно начала координат находят из выражения

$$J_0 = \int_V \gamma r^2 dV,$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

или

$$J_0 = \int_V \gamma(x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Следовательно

$$J_0 = \frac{1}{2} (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2).$$

Аналогично определяют моменты инерции однородной плоской материальной фигуры:

$$J_x = \int_S \gamma y^2 dS;$$

$$J_y = \int_S \gamma x^2 dS;$$

$$J_0 = \int_S \gamma r^2 dS.$$

Но поскольку $r^2 = x^2 + y^2$, отсюда

$$J_0 = \int_S \gamma(x^2 + y^2) dS = J_y + J_x.$$

Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах

Обобщенные координаты системы. Под обобщенными координатами понимают такие независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно в любой момент определить положение этой системы.

Для любой системы число обобщенных параметров равно числу степеней свободы этой системы. На примере кривотипно-шатунного механизма, имеющего одну степень свободы, координаты любой точки (x, y) могут быть выражены через угол φ (рис. 8.2):

$$x_A = r \cos \varphi; \quad y_A = r \sin \varphi;$$

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}; \quad y_B = 0.$$

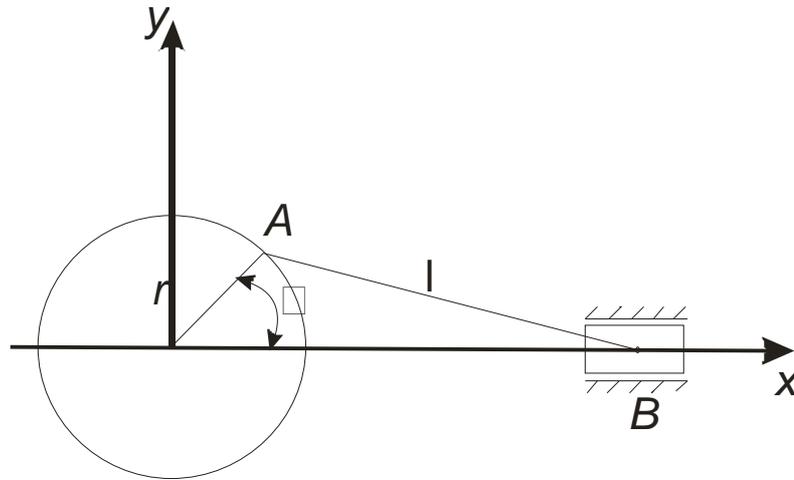


Рис. 8.2

В общем случае декартовы координаты каждой точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ могут быть выражены через обобщенные координаты q_i системы, имеющей k степеней свободы:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k); \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k); \quad z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k).$$

Для нестационарных связей аналогичные выражения имеют вид

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t);$$

$$y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t);$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t),$$

т.е. в каждое уравнение в качестве аргумента входит время t .

Дифференциальные уравнения движения. Дифференциальные уравнения движения механической системы, имеющей k степеней свободы, в обобщенных координатах записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \end{cases}$$

где T - кинетическая энергия системы,

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2}$$

m_i, V_i^2 – масса и скорость точки; Q – обобщенные силы, выражения для которых также записываются через обобщенные координаты:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1}) = Q_1 \\ \sum_{i=1}^n (X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_2}) = Q_2 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n (X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}) = Q_k. \end{cases}$$

Проекции внешних сил F_i на координатные оси записаны через X_i, Y_i, Z_i .

Дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах называются также уравнениями Лагранжа. Число уравнений Лагранжа равно числу обобщенных координат данной системы.

Пример 8.1. Кривошипно-шатунный механизм нагружен горизонтальной силой P , приложенной к ползуну, и силой Q , приложенной перпендикулярно к кривошипу в точке A (рис. 8.3).

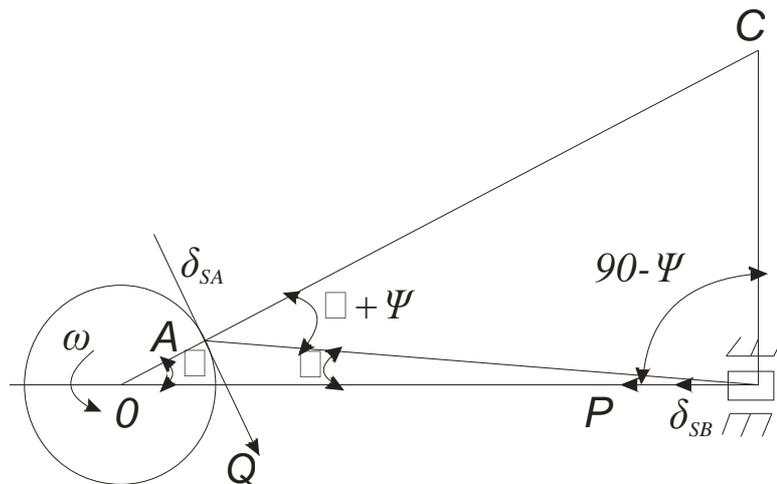


Рис. 8.3

Найти соотношение между силами в состоянии равновесия механизма.

Решение. Согласно принципу возможных перемещений

$$P \delta_{SB} - Q \delta_{SA} = 0,$$

где δ_{SB} и δ_{SA} – модули возможных перемещений точек B и A .

Модули возможных перемещений точек A и B пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра вращения шатуна C – соответственно AC и BC , где AC и BC – перпендикулярны к векторам возможных перемещений δ_{SB} и δ_{SA} .

Тогда

$$\frac{\delta_{SA}}{\delta_{SB}} = \frac{AC}{BC} \text{ или } \frac{P}{Q} = \frac{AC}{BC}.$$

Из ABC по теореме синусов

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin(90 - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} = \frac{\cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Следовательно, при равновесии силы должны удовлетворять условию

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos \psi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

Пример 8.2. Шарнирно соединенные между собой стержни OA и AB (рис. 8.4) нагружены силами P_1 , P_2 и горизонтальной силой P_3 .

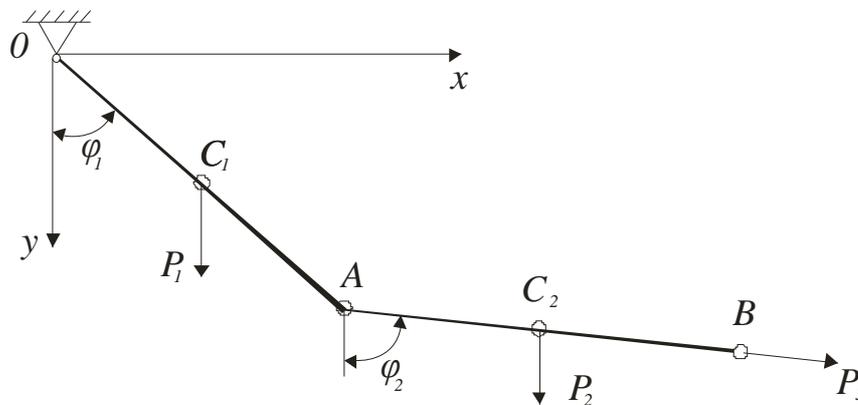


Рис.8.4

Стержни имеют соответственно длину $OA=2l_1$, $AB=2l_2$; точки C_1 и C_2 – центры этих стержней. Найти φ_1 и φ_2 при условии равновесия стержней.

Решение. Примем искомые углы за обобщенные координаты. Координаты точек $C_1(x_1, y_1)$, $C_2(x_2, y_2)$, $B(x_3, y_3)$ связаны с обобщенными координатами следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi_1; & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1; \\ x_2 &= 2l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2; & y_2 &= 2l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \\ x_3 &= 2l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2; & y_3 &= 2l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2; \end{aligned}$$

Обобщенные силы найдем по формулам

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sum_{i=1}^3 (X_i \frac{\delta x_i}{\delta \varphi_1} + Y_i \frac{\delta y_i}{\delta \varphi_1}) = P_1 \frac{\delta y_1}{\delta \varphi_1} + P_2 \frac{\delta y_2}{\delta \varphi_1} + P_3 \frac{\delta y_3}{\delta \varphi_1} \\
&= -P_1 l_1 \sin \varphi_1 - 2P_2 l_1 \sin \varphi_1 + 2P_3 l_1 \cos \varphi_1 \\
&= l_1 (2P_3 \cos \varphi_1 - (P_1 + 2P_2) \sin \varphi_1); \\
Q_2 &= \sum_{i=1}^3 (X_i \frac{\delta x_i}{\delta \varphi_2} + Y_i \frac{\delta y_i}{\delta \varphi_2}) = P_1 \frac{\delta y_1}{\delta \varphi_2} + P_2 \frac{\delta y_2}{\delta \varphi_2} + P_3 \frac{\delta y_3}{\delta \varphi_2} = -P_2 l_1 \sin \varphi_2 + P_3 l_2 \cos \varphi_2 \\
&= l_1 (2P_3 \cos \varphi_2 - P_2 \sin \varphi_2).
\end{aligned}$$

В состоянии равновесия обобщенные силы равны нулю, или

$$2P_3 \cos \varphi_1 - (P_1 + 2P_2) \sin \varphi_1 = 0,$$

$$2P_3 \cos \varphi_2 - P_2 \sin \varphi_2 = 0.$$

Решая полученную систему уравнений относительно φ_1 и φ_2 , получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2P_3}{P_1 + 2P_2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2P_3}{P_2}.$$

Лекция 9. ОСНОВНЫЕ УПРОЩЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАСЧЕТАХ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Надежность приборов и устройств, используемых в электронной технике, в значительной мере зависит от прочности, жесткости и устойчивости деталей при действии механических и термомеханических нагрузок. Так, при проектировании ИС конструктор должен произвести расчет механической прочности внешних и внутренних выводов, а также корпуса и кристалла. При разработке конструкции робота требуется обеспечить высокую точность позиционирования, для чего необходимо произвести расчеты на жесткость.

Под прочностью понимают способность конструкции и ее элементов воспринимать нагрузки без разрушения остаточной деформации. Под жесткостью подразумевают способность конструкции и её элементов сопротивляться изменению размеров и формы под действием нагрузки.

При проведении инженерных расчетов реальные конструкции заменяют расчетными схемами. В расчетной схеме несущественные особенности конструкции не учитываются. Одновременно вводятся допущения и гипотезы, упрощающие расчет.

9.1 Гипотезы и допущения

В расчетах на прочность и жесткость принимают следующие основные допущения относительно свойств материалов и характера деформаций

Гипотезы сплошности и однородности материала. Принимают, что материал заполняет весь объём тела и в любом сколь угодно малом объёме свойства материала одинаковы. Эти гипотезы позволяют использовать в расчетах математический аппарат исчисления бесконечно малых величин. В некоторых случаях гипотеза однородности не применима, например в случае армированных материалов.

Гипотеза изотропности. Предполагают, что механические свойства материала по всем направлениям одинаковы. В некоторых случаях эта гипотеза неприменима, например для слоистых и армированных материалов, механические свойства которых в различных направлениях неодинаковы.

Гипотеза упругости. Предполагают, что деформация материала прямо пропорциональна нагрузке и полностью исчезает при разгрузке. Эта гипотеза соблюдается лишь до определенного предела.

Допущение о малости деформаций. Считают, что деформации деталей малы по сравнению с их размерами. Поэтому при составлении уравнений равновесия и анализе деформаций можно исходить из начальных размеров и не учитывать их изменения под действием нагрузки. К упругим системам при малых деформациях применим принцип независимости действия сил. Согласно этому принципу деформация и перемещения при действии нескольких сил равны сумме деформаций и перемещений, вызванных каждой силой в отдельности.

При исследовании распределения напряжений в поперечных сечениях брусьев принимают также следующие гипотезы:

Гипотеза Бернулли или гипотеза плоских сечений. Предполагает, что поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и после деформации.

Принцип Сен-Венана. Распределение напряжений в поперечных сечениях бруса, удаленных от его торцов, определяется только равнодействующей сил, приложенных к торцу, и не зависит от характера распределения этих сил. При расчетах на прочность и жесткость все многообразие форм элементов конструкций приводят к нескольким простейшим формам, отбрасывая второстепенные особенности формы тел.

Основные расчетные схемы элементов конструкций

Брус- тело, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. В зависимости от формы оси брусья бывают прямые, кривые или пространственно изогнутые с постоянным или переменным сечением. Тонкие длинные брусья называют также стержнями; брусья, работающие на изгиб, называют балками. По схеме бруса рассчитывают валы, соединительные проводники и выводы микроэлектронных приборов, элементы роботов-манипуляторов и др.

Пластина - плоское тело, толщина которого мала по сравнению с размерами в плане. Примерами пластин являются платы и корпуса микроэлектронике приборов, плоские крышки резервуаров и др.

Оболочка - тело, ограниченное двумя близкими одна к другой криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с размерами самого тела. Примерами оболочек могут служить корпусные детали технологических установок, корпуса приборов, колпаки вакуумных установок.

9.2. Силы, напряжения, деформации

Силы представляют собой меру механического взаимодействия тел или его частей. Силы подразделяют на сосредоточенные и распределенные по линии, поверхности (давление), и объему (например, силы тяготения). Сосредоточенные силы передаются на тело через площадки небольших размеров. При расчетах сосредоточенную силу считают приложенной в точке

Силы могут быть внешние и внутренние. Внешними силами называют силы, передающиеся на тело со стороны других тел. Они могут быть двух видов: активные, создаваемые прикладываемыми к телу нагрузками, и реактивные силы, возникающие в наложенных на тело связях под действием активных сил. Внутренними силами называются силы взаимодействия между частицами материала.

Реактивные силы определяют с помощью уравнений равновесия. Рассматриваемый элемент конструкции мысленно освобождают от связей и заменяют их реактивными силами. Выбрав затем координатные оси, составляют уравнения равновесия и, решая их, определяют величины реактивных сил.

Внутренние силы в поперечном сечении бруса находят методом сечений, который заключается в следующем.

1. Брус мысленно рассекают плоскостью на две части (рис. 9.1,а)
2. Одну из частей отбрасывают и взамен ее к оставшейся части прикладывают внутренние силы, распределенные по площади сечения (рис. 9.1, б).

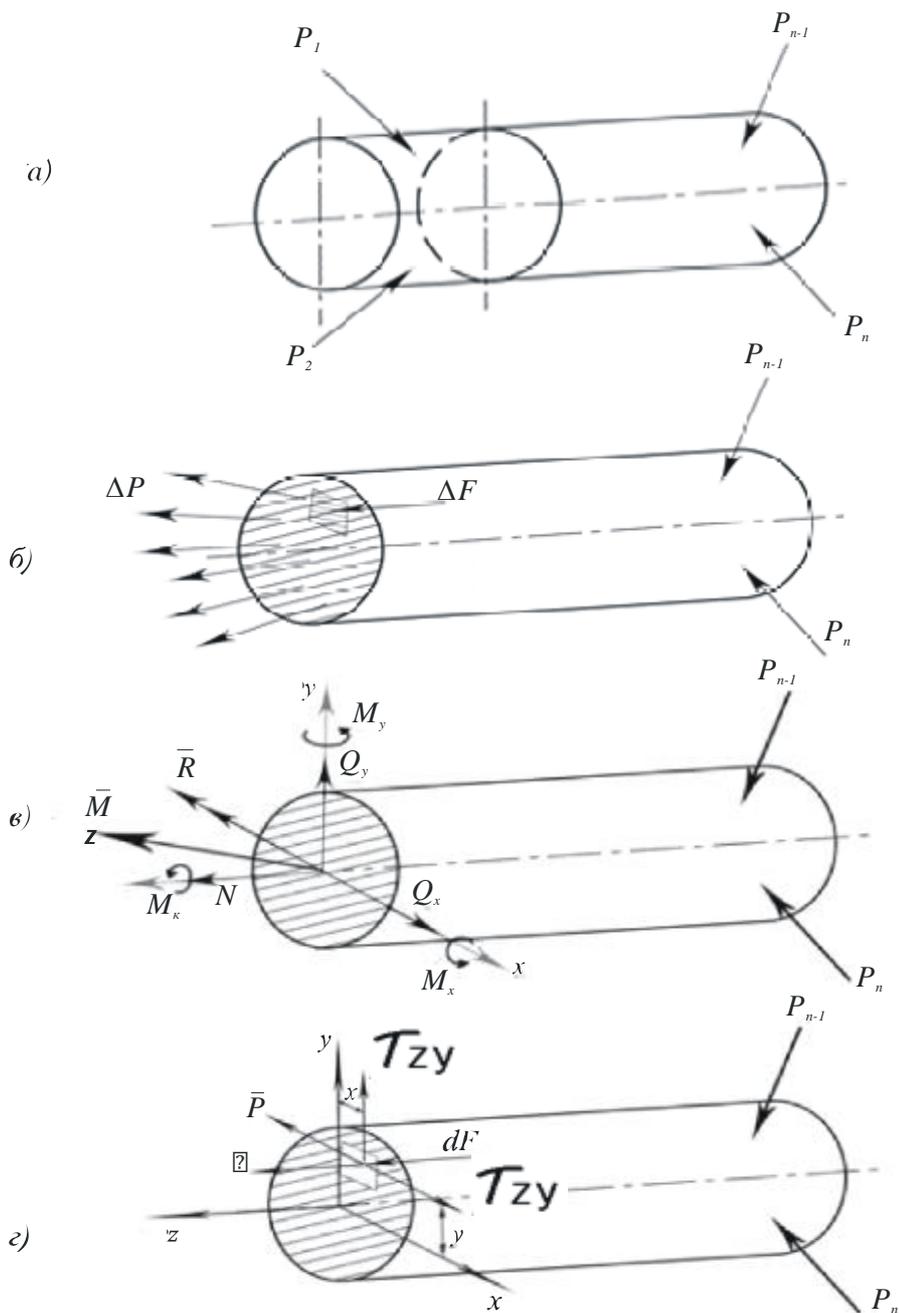


Рис. 9.1.

3. Внутренние силы приводят к центру тяжести сечения и получают главный вектор R и главный момент M внутренних сил (рис.9.1,в). Векторы R и M раскладывают на составляющие по трем координатным осям x , y , z , получают три силы и три момента, которые называются внутренними силовыми факторами. Составляющие главного вектора R : N - нормальная сила; Q_x и Q_y - поперечные силы. Состав-

ляющие главного момента M : M_k - крутящий момент; M_x и M_y - изгибающие моменты.

4. Составляют уравнения равновесия для оставшейся части бруса; решая эти уравнения, определяют внутренние силовые факторы.

Интенсивность внутренних сил, действующих в сечении, называется напряжением

Выделим вокруг произвольной точки сечения бруса площадку ΔF (рис. 2.1,б). Равнодействующую внутренних сил, действующих в пределах этой площадки, обозначим ΔP . Среднее напряжение P_{cp} на площадке ΔF равно

$$P_{cp} = \frac{\Delta P}{\Delta F}$$

Истинное напряжение P в точке равно

$$P = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}$$

Вектор напряжения P в общем случае направлен под углом к площадке (рис.9.1,г). Проекцию вектора P на нормаль (ось z) называют нормальным напряжением и обозначают – σ . Проекции вектора P на оси x и y называют касательными напряжениями и обозначают τ_{zx} и τ_{zy} . Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих во всем множестве площадок, проходящих через данную точку, характеризует напряженное состояние в этой точке.

Под действием внешних сил все тела деформируются. Рассмотрим отрезок AB соединяющий две точки тела (рис 9.2).

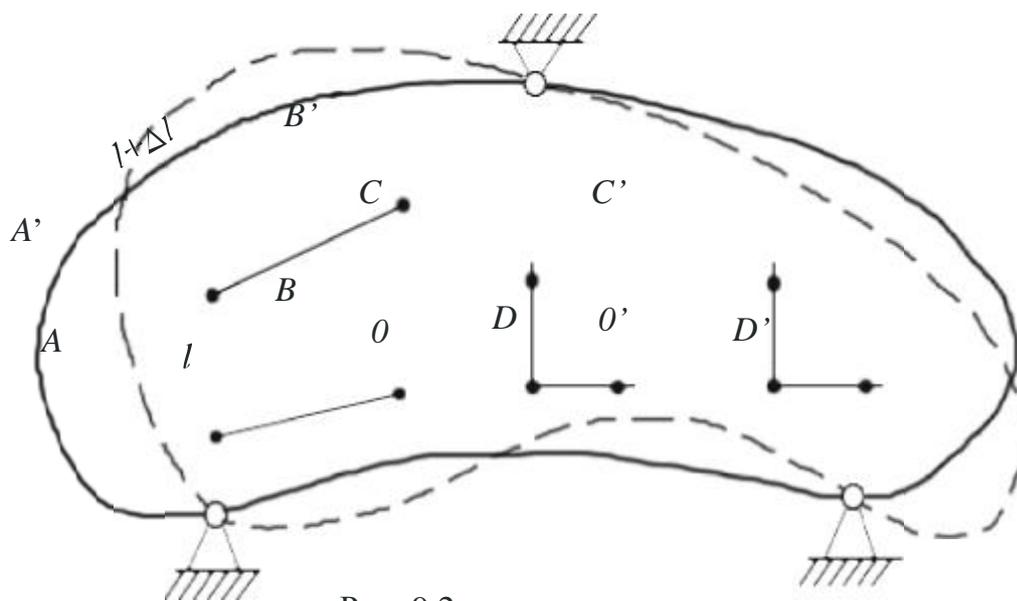


Рис. 9.2.

При нагружении тела длина l отрезка изменяется на величину Δl . Тогда относительное удлинение отрезка составит

$$\varepsilon_{cp} = \Delta l / l.$$

Эту величину называют средней относительной деформацией отрезка AB . Истинную деформацию в точке A по направлению AB определяют по формуле

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l}$$

Деформации в направлении координатных осей x, y, z соответственно обозначают $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Кроме линейных, возникают также угловые деформации. Изменение прямого угла, образованного отрезками OD и OC , называют узловой деформацией (рис. 9.2). В координатных плоскостях угловые деформации обозначают $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$.

Совокупность всех линейных и угловых деформаций для бесконечного множества осей, проходящих через данную точку, характеризует деформированное состояние в точке.

Внутренние силовые факторы можно выразить через напряжения в виде следующих равенств:

$$N = \int_F \sigma dF; \quad Q_x = \int_F \tau_{zx} dF; \quad Q_y = \int_F \tau_{xy} dF;$$

$$M_x = \int_F \sigma y dF; \quad M_y = \int_F \sigma x dF; \quad M_k = \int_F (\tau_{xy} x dF - \tau_{zx} y dF).$$

При оценке прочности и жесткости типовых элементов конструкций проводят расчеты на прочность и жесткость.

В расчетах на прочность сравнивают максимальные величины напряжений, действующих в детали конструкции, с допускаемыми для данного материала. Последние определяют путем испытаний образцов в лаборатории.

В расчетах на жесткость сравнивают перемещения в характерных сечениях, найденные расчетным путем, с перемещениями, допускаемыми по условиям эксплуатации.

Лекция 10. АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В БРУСЕ

Анализ внутренних силовых факторов при различных видах нагружения бруса необходим для определения наиболее опасных сечений и является составной частью расчета на прочность и жесткость.

Порядок проведения анализа следующий.

1. Определяют силы реакций в опорах, используя уравнения статики.

На рис. 10.1 схематично изображены различные варианты опор и возникающие в них силы реакции: жесткая заделка (рис. 10.1,а) шарнирная опора (рис. 10.1,б); катковая опора (рис. 10.1,в).

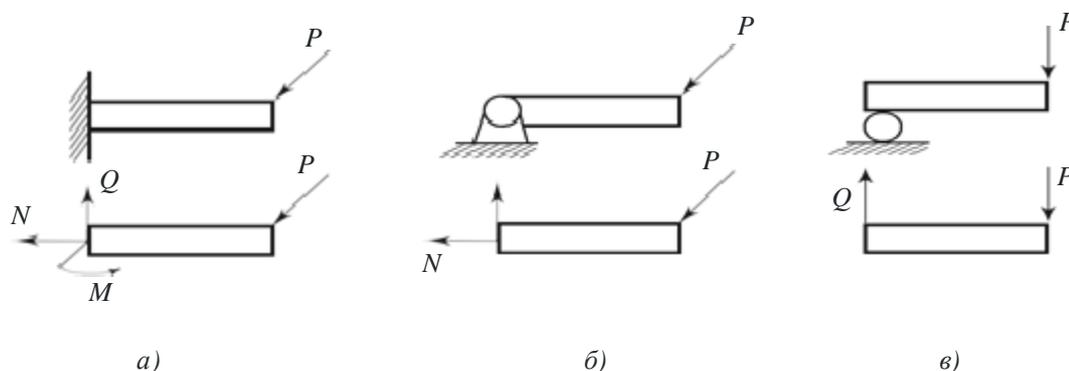


Рис. 10.1

2. Брус разбивают на участки. В пределах участка внутренние силовые факторы изменяются монотонно. Брус, изображенный на рис. 10.2, имеет участки: AB , BC , CD .

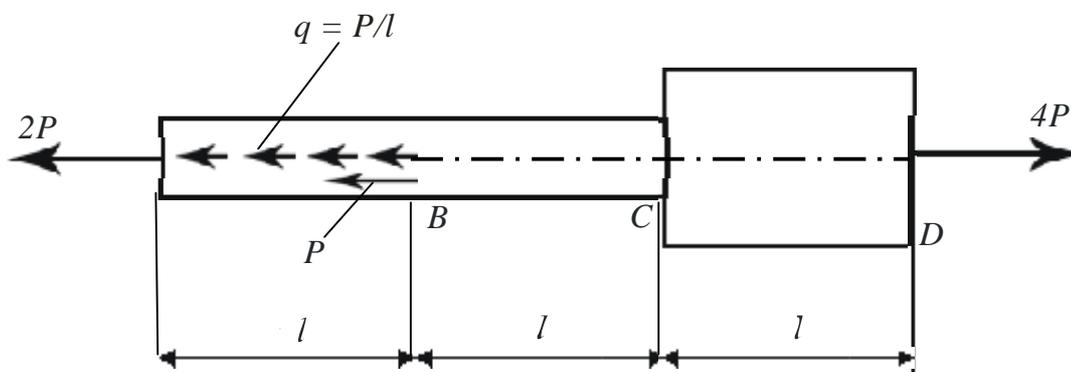


Рис. 10.2

3. Вычисляют значения внутренних силовых факторов в пределах каждого участка, используя метод сечений.

4. Строят графики - эпюры внутренних силовых факторов, по которым определяют положение опасного сечения.

При построении эпюр следует соблюдать следующие правила знаков:

Нормальную силу N считают положительной, если она является растягивающей, и отрицательной, если она является сжимающей (рис. 10.3,а).

Поперечную силу Q считают положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенных к левой части бруса, направлена вверх (рис. 10.3,б).

Крутящий момент M_k считают положительным, если брус закручивается по направлению, противоположному движению часовой стрелки (рис. 10.3,в).

Изгибающий момент M_x или M_y считают положительным, если под его действием ось бруса искривляется так, что вогнутая часть находится сверху (рис. 10.3.г).

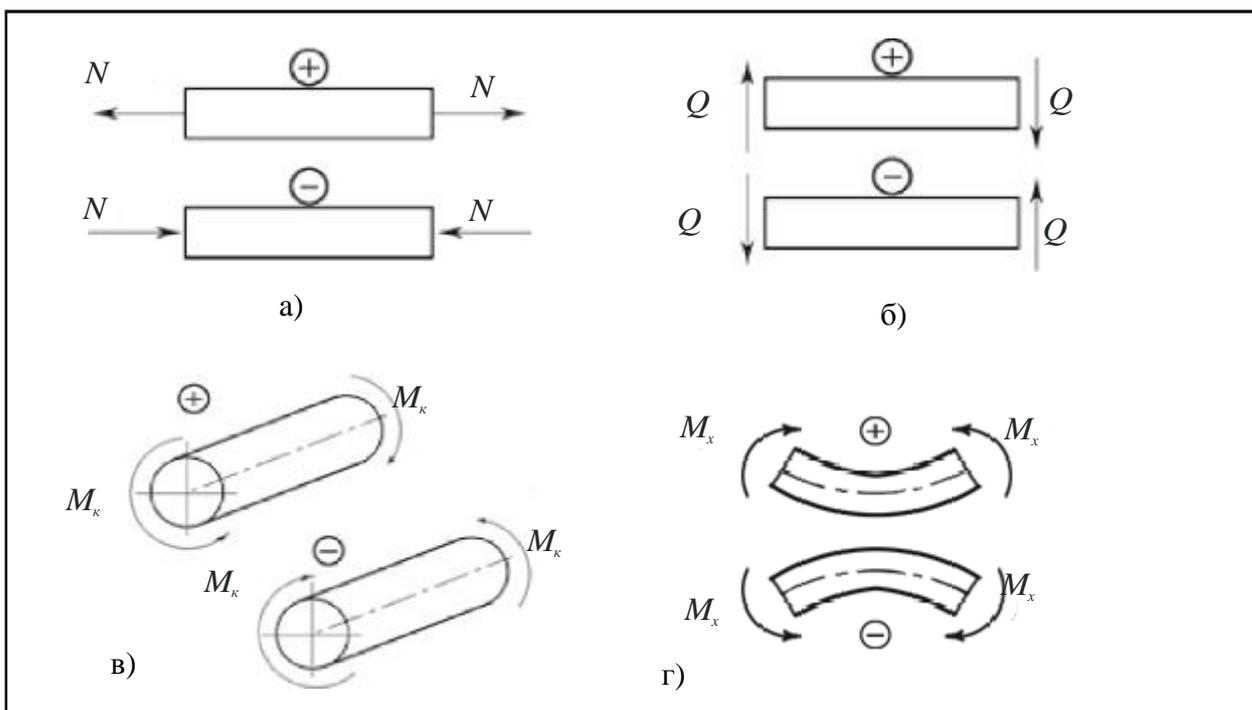


Рис. 10.3

10.1. Анализ распределения нормальных сил

Анализ распределения нормальных сил рассмотрим на примере бруса, изображенного на рис. 10.4,а.

1. Используя уравнение равновесия, находим реактивную нормальную силу R_c в заделке C (рис. 10.4,б):

$$\sum z = 0,$$

$$-P - ql + 3P - R_c = 0; \quad R_c = 0.$$

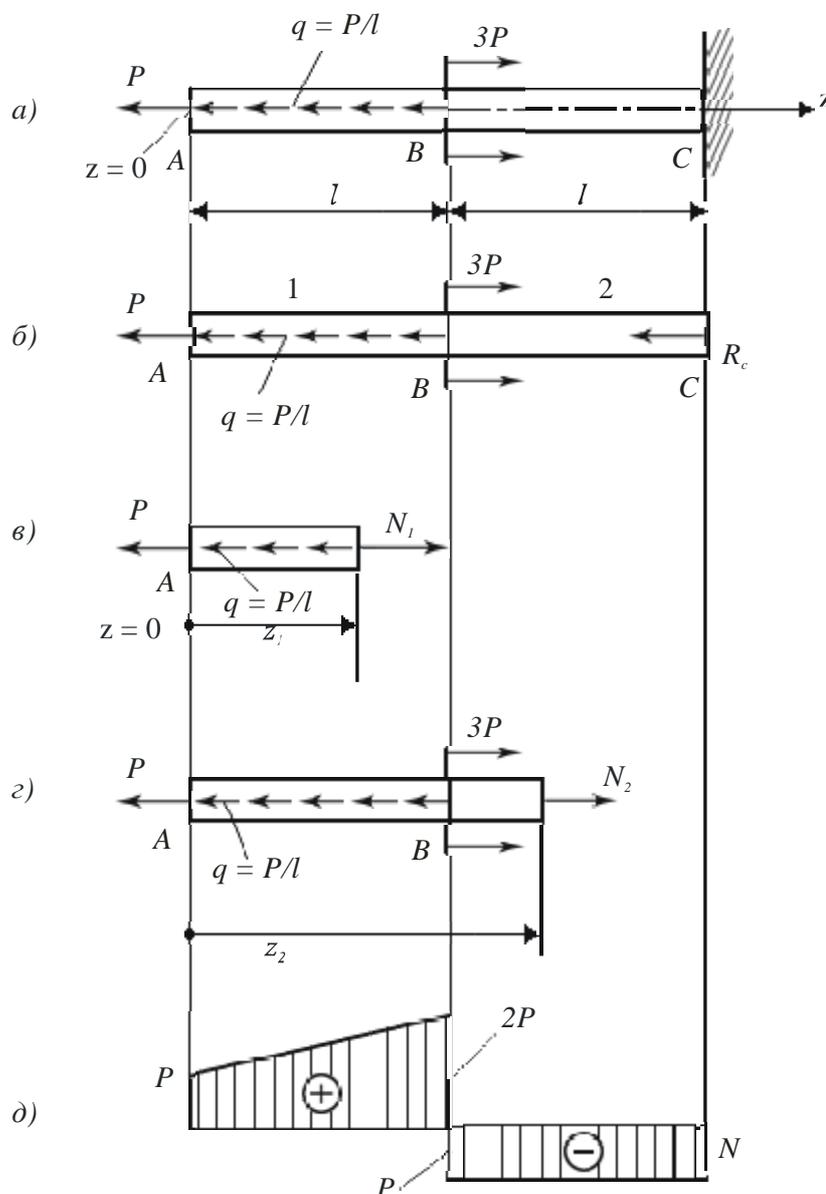


Рис. 10.4.

2. Выделяем участки бруса: 1 участок - AB , $0 \leq z_1 \leq l$ и 2 участок - BC $l \leq z_2 \leq 2l$.

3. Мысленно отсекаем часть бруса на расстоянии z_1 от точки A (рис. 10.4,в). Составив уравнение равновесия левой отсеченной части бруса $\sum z_i = 0$, находим величину внутренней силы на 1 участке

$$N_1 = P + qz_1.$$

Величину внутренней силы на 2 участке определяем аналогично. Рассматривая равновесие отсеченной части бруса на рис. 10.4,г, получим

$$N_2 = P + ql - 3P = -P.$$

4. Для построения эпюры нормальных сил проводим ось эпюры параллельно оси бруса. Величины нормальных сил откладываем перпендикулярно оси эпюры в выбранном масштабе с учетом их знаков. Эпюра изображена на рис. 10.4,д.

10.2. Анализ распределения крутящих моментов

Анализ распределения крутящих моментов M_k рассмотрим на примере бруса, изображенного на рис. 10.5,а.

I. Составляем уравнение равновесия бруса (рис. 10.5,б)

$$\sum M_z = 0, \quad m - \frac{m}{l} - 3m + M_c = 0,$$

и находим реактивный момент M_c в заделке C

$$M_c = 3m.$$

2. Выделяем участки бруса: 1 участок - AB , $0 \leq z_1 \leq l$, 2 участок - BC , $l \leq z_2 \leq 2l$.

3. Применяя метод сечений к каждому участку (рис. 10.5, в,г), находим внутренние крутящие моменты для 1 и 2 участков:

$$M_{k1} = m - \frac{m}{l} z_1;$$

$$M_{k2} = 3m - \frac{m}{l} l - m = 2m.$$

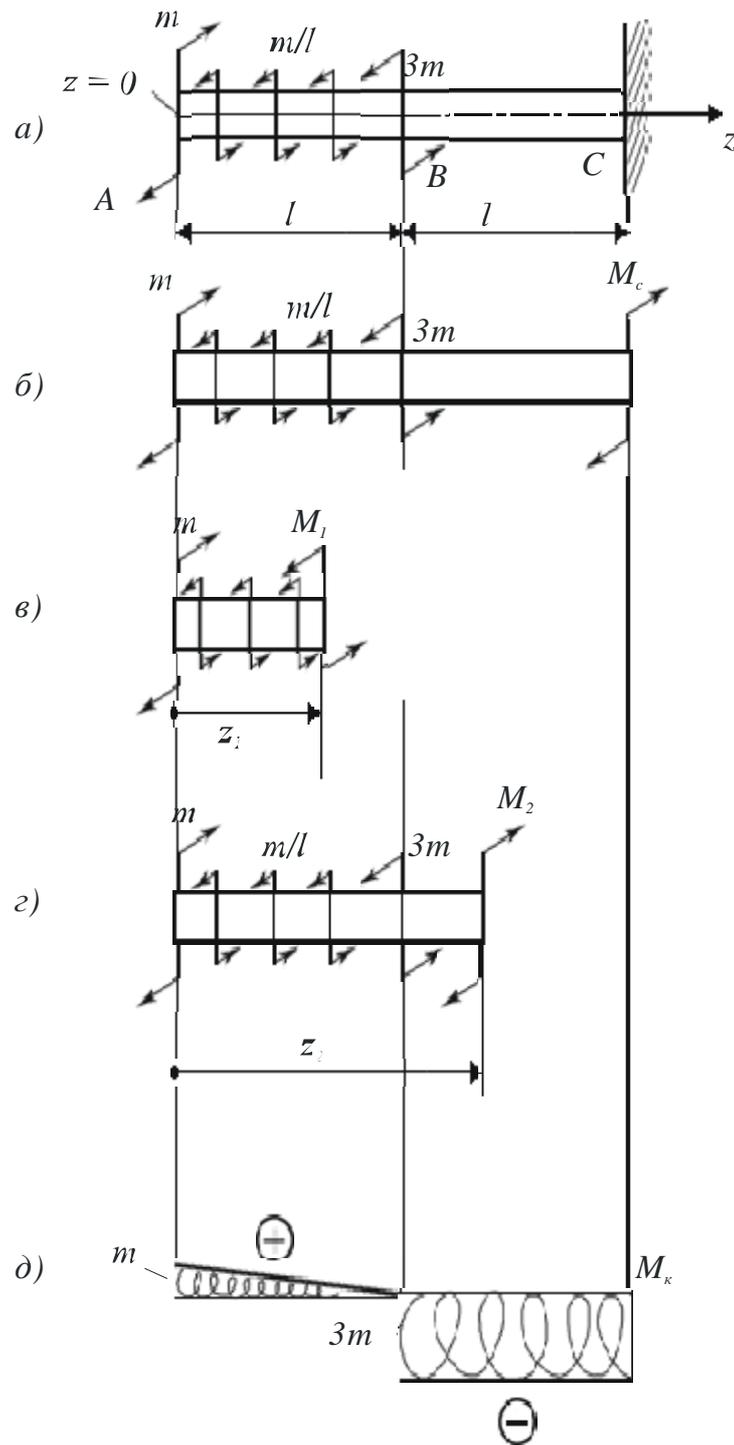


Рис. 10.5.

4. По полученным значениям внутренних моментов строим эпюру с учетом правила знаков для внутренних моментов (рис. 10.5, д).

10.3. Анализ внутренних силовых факторов при изгибе

При изгибе бруса (балки) в поперечных сечениях могут возникать два силовых фактора - поперечная сила Q и изгибающий момент M . Для их определения применяем метод сечений. Мысленно рассекая балку поперечной плоскостью, прикладываем в сечении поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_x , имеющие положительные направления в соответствии с принятым правилом знаков. Эти силовые факторы определяем из уравнений равновесия частей балки.

Рассмотрим двухопорную балку (рис. 10.6,а), нагруженную сосредоточенной силой P

Из уравнений равновесия балки определяем силы реакций в опорах R_A и R_B (рис. 10.6,б):

$$\sum M_A = 0, \quad R_B = \frac{Pa}{l}; \quad \sum M_B = 0, \quad R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Балка имеет два участка:

Применяя метод сечений, получаем на 1 участке

$$Q_{y1} = R_A = P \frac{b}{l}, \quad M_{x1} = \frac{Pb}{l} z_1;$$

на 2 участке

$$Q_{y2} = R_A - P = -\frac{Pa}{l}, \quad M_{x2} = R_A z_2 - P(z_2 - a) = \frac{Pb}{l} z - P(z - a).$$

Эпюры Q_y и M_x показаны на рис. 10.6, в. Поперечная сила в пределах каждого участка постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

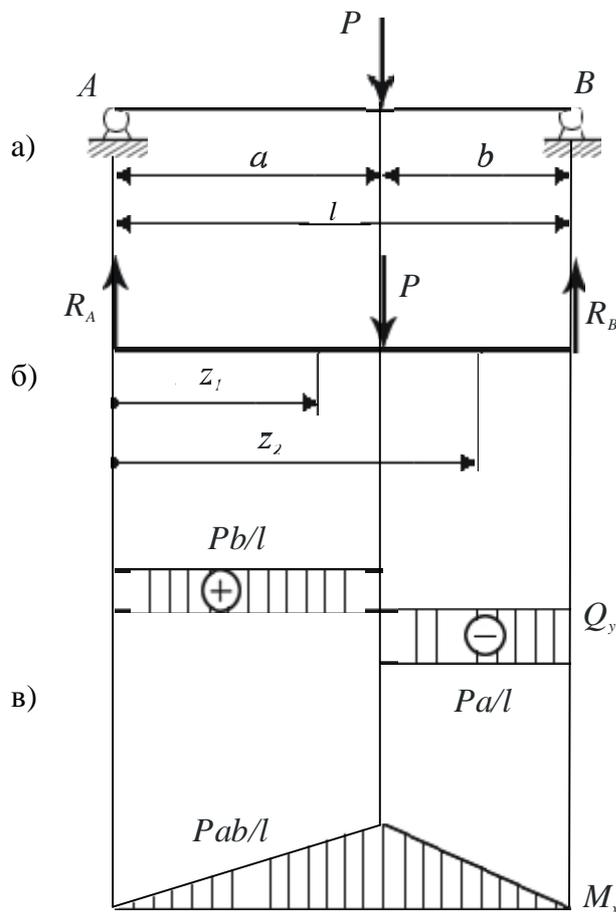


Рис. 10.6

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную сосредоточенным моментом m (рис. 10.7,а) (круговая стрелка на рис. 10.7 указывает направление вращения).

Составив уравнения равновесия балки, определяем силы реакций в опорах R_A , R_B (рис. 10.7,б):

$$\sum M_A = 0, \quad R_B = \frac{m}{l}; \quad \sum M_B = 0, \quad R_A = -\frac{m}{l}.$$

Балка имеет два участка: $0 \leq z_1 \leq a$ и $a \leq z_2 \leq b$.

Применяя метод сечений, получаем:

на 1 участке

$$Q_{y1} = R_A = -\frac{m}{l}, \quad M_{x1} = -\frac{m}{l}z;$$

на 2 участке

$$Q_{y2} = R_A = -\frac{m}{l}, \quad M_{x2} = -\frac{m}{l}z + m.$$

Эпюры Q_y и M_x показаны на рис. 10.7,в. Поперечная сила постоянна по всей длине балки, а изгибающий момент изменяется по линейному закону в пределах каждого участка.

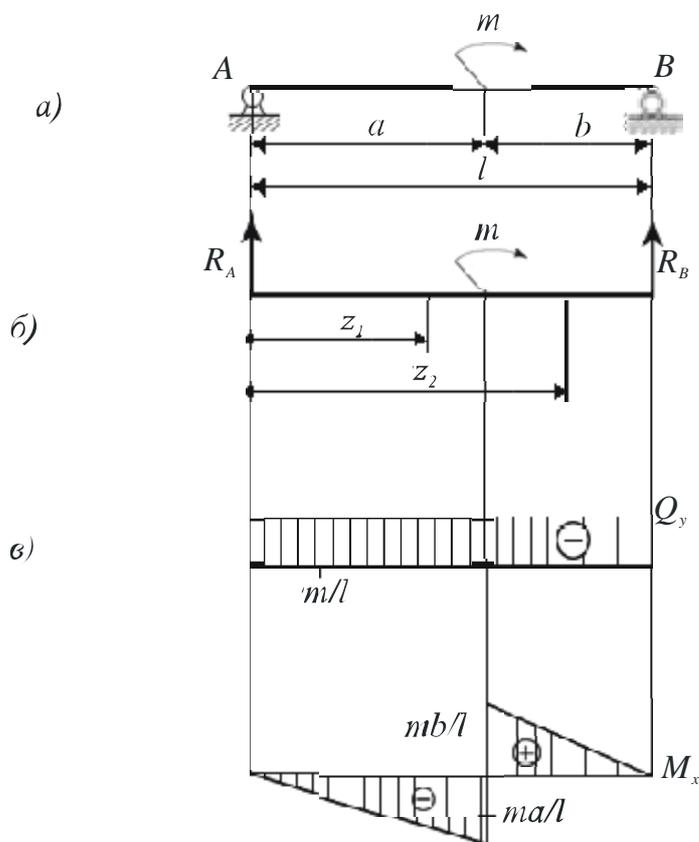


Рис. 10.7.

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную распределенной нагрузкой постоянной интенсивности q (рис. 10.8,а).

Используя уравнения равновесия балки, определяем силы реакции в опорах R_A и R_B (рис. 10.8,б): $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

Балка имеет один участок.

Применяя метод сечений, получаем

$$Q_y = \frac{ql}{2} - qz, \quad M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$

Эпюры Q_y и M_x показаны на рис. 10.8,в. Поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент - по закону квадратной параболы. В сече-

нии $z = l/2$ $Q_y = 0$, а изгибающий момент имеет максимальное значение $M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$.

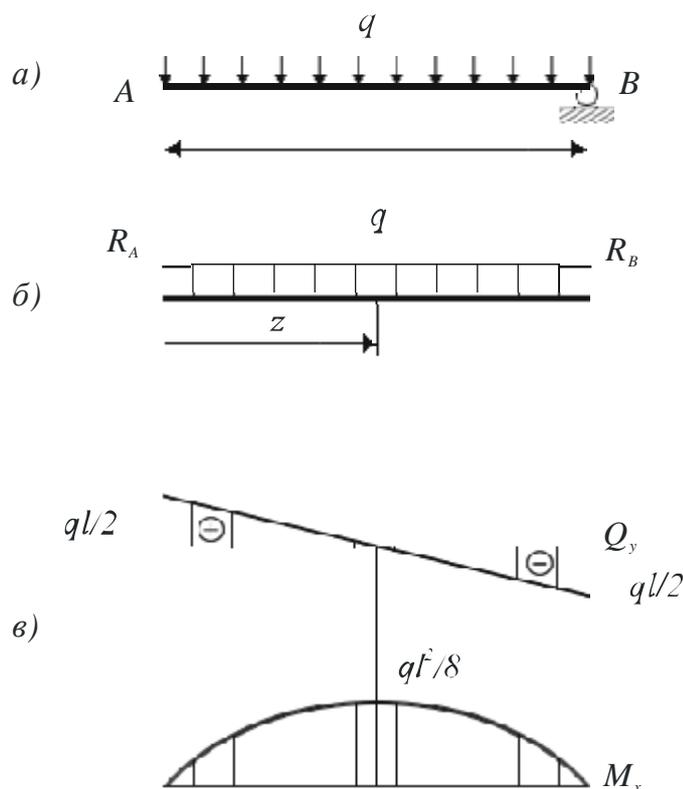


Рис. 10.8

10.4. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью поперечной распределенной нагрузки

В общем случае изгиба на балку могут действовать сосредоточенные силы P_i и моменты M_i , поперечная распределенная нагрузка q_i постоянной или переменной интенсивности. Рассмотрим элемент балки длиной dz (рис. 10.9).

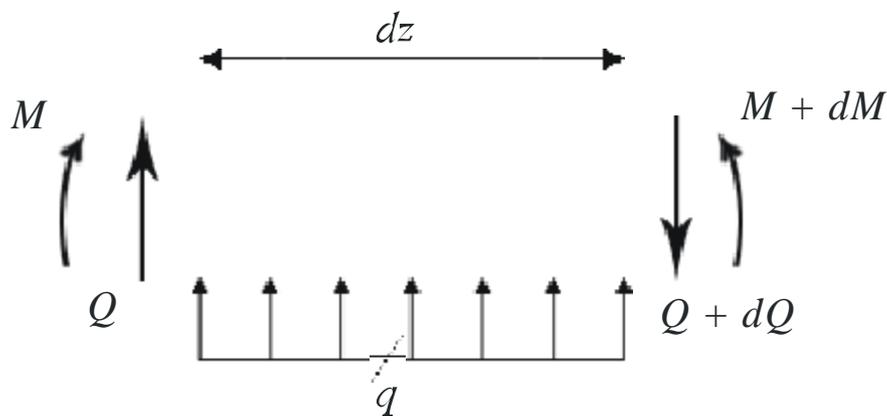


Рис. 10.9

Составим уравнения равновесия сил, действующих на выделенный элемент:

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0, Q + qdz - (Q + dQ) = 0; \\ \sum M_0 &= 0, -M - Qdz - qdz \frac{dz}{2} + (M + dM).\end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости получим из первого уравнения

$$q = \frac{dQ}{dz},$$

из второго уравнения

$$Q = \frac{dM}{dz} \quad (10.1)$$

Зависимость (10.1) используют для нахождения положения экстремума на эпюре моментов. Согласно (10.1) изгибающий момент M достигает экстремума там, где Q равно нулю.

Анализируя эпюры, представленные на рис. 10.6 - 10.8, отметим следующее:

1. В точке приложения поперечной сосредоточенной силы на эпюре Q должен быть скачок на величину силы, а на эпюре M - излом, направленный навстречу силе.

2. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре должен быть скачок на величину момента.

3. На участке, где поперечная сила постоянна и положительна, эпюра M - прямая с положительным углом наклона; там, где $Q < 0$, эпюра M - прямая с отрицательным углом наклона; в сечении, где $Q = 0$, эпюра M имеет экстремум.

4. На том участке, где действует распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M - по закону квадратной параболы.

Рассмотрим применение этих правил на примере.

Пример. Схема балки изображена на рис. 10.10,а. Используя уравнения равновесия, определяем силы реакций в опорах R_A , R_C (рис.10.10,б):

$$\sum M_A = 0, R_C = P; \sum M_C = 0, R_A = P.$$

Разбиваем балку на три участка: 1 участок $0 \leq z_1 \leq l$; 2 участок $l \leq z_2 \leq 3l$; 3 участок $3l \leq z_3 \leq 4l$.

Применяя метод сечений, определяем внутренние силовые факторы на участках 1 - 3 рис. 10.10,в (индексы x и y в уравнениях опущены)

$$\sum Y_1 = 0, \quad P - Q_1 = 0, \quad Q_1 = P;$$

$$\sum M_1 = 0, \quad Pz_1 - M_1 = 0, \quad Pz_1 = M_1, \quad M_B = Pl;$$

$$\sum Y_2 = 0, \quad P - q(z_2 - l) - Q_2 = 0, \quad Q_2 = P - q(z_2 - l);$$

$$\sum M_2 = 0, \quad Pz_2 - \frac{q(z_2 - l)^2}{2} - M_2 = 0, \quad M_2 = Pz_2 - \frac{q(z_2 - l)^2}{2};$$

$$\text{при } z_2 = 3l, \quad Q_2 = -P, \quad M_2 = Pl;$$

$$\sum Y_3 = 0, \quad P - q2l + P - Q_3 = 0, \quad Q_3 = 0;$$

$$\sum M_3 = 0, \quad Pz_3 - q2l(z_3 - 2l) + P(z_3 - 3l) - M_3 = 0, \quad M_3 = Pl.$$

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_z (рис. 10.10,г). В сечениях A и C на эпюре Q_y имеются скачки на величину приложенных сил. На 2 участке, где приложена распределенная нагрузка, Q_y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы, причем в сечении $z = 2l$, где $Q_z = 0$, эпюра M_x имеет экстремум $M_{\max} = \frac{3}{2}Pl$. В сечении D на эпюре M_x имеет место скачок на величину сосредоточенного момента $m = Pl$.

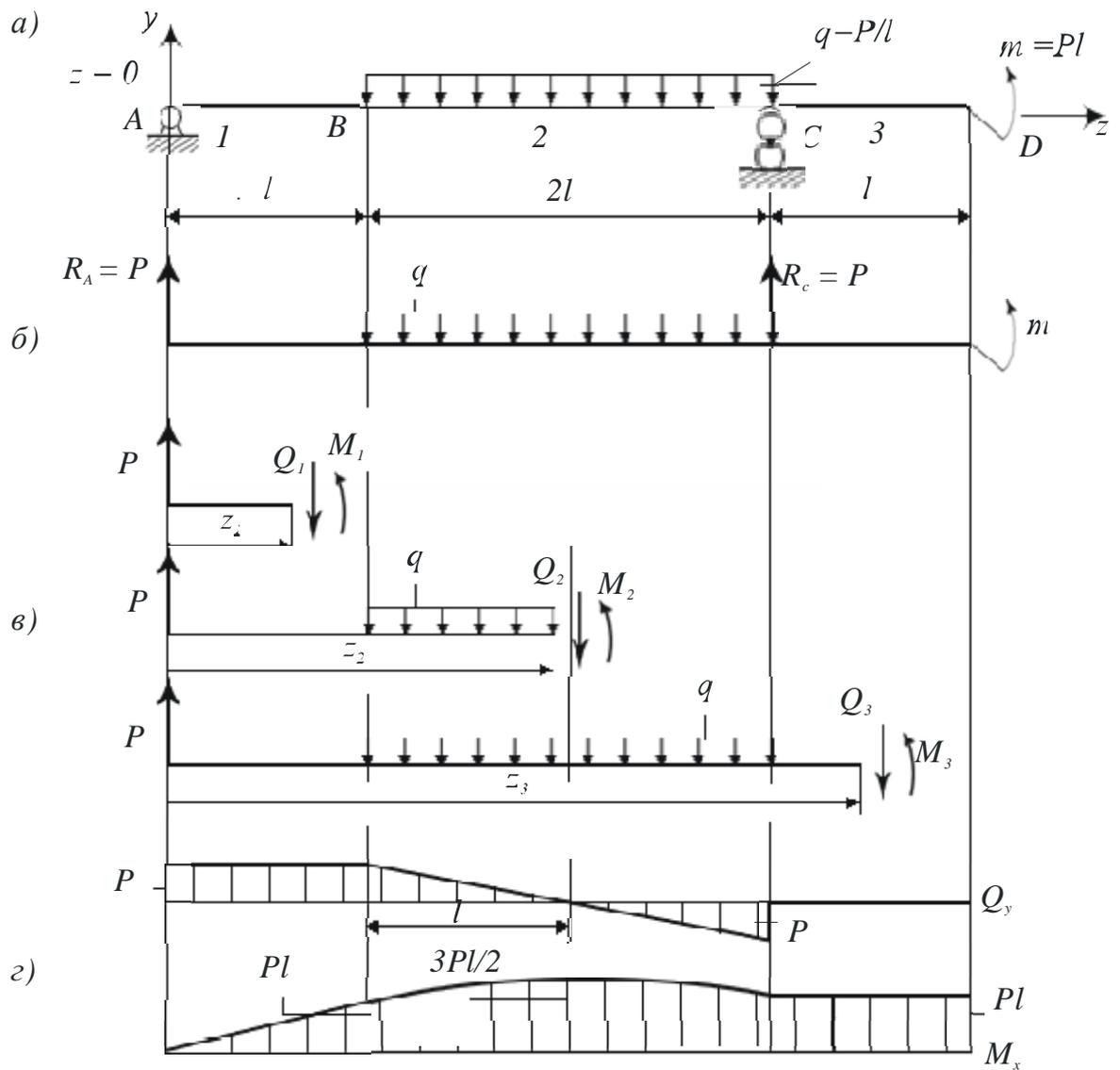


Рис. 10.10.

На 1 участке, где $Q = P$, эюра M_x – прямая, идущая вверх, а на 3 участке $Q_y = 0$, $M_x = Pl = const$.

Лекция 11. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Важным этапом при конструировании элементов ИС и технологического оборудования является оценка напряжений, возникающих в них при производстве и эксплуатации. Многие элементы ИС и технологического оборудования в процессе эксплуатации испытывают действие растяжения или сжатия. Так, при нагреве и охлаждении многослойных паяных соединений СВЧ-микросборок, пьезоэлектрических элементов, микросхем или других полупроводниковых приборов ввиду разности коэффициентов термического линейного расширения (КТЛР) соединяемых деталей возникают растягивающие или сжимающие усилия.

11.1. Внутренние силы, напряжения и деформации

При растяжении и сжатии в поперечном сечении бруса (рис.11.1,а) возникает только нормальная сила N (рис.11.1,б), линия действия которой совпадает с продольной осью бруса, проходящей через центры тяжести поперечных сечений.

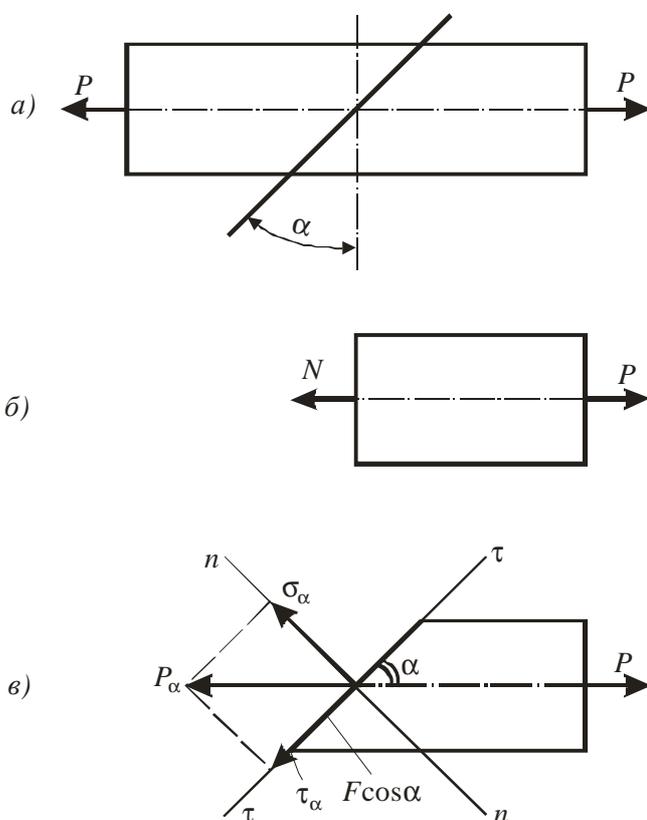


Рис.11.1.

При растяжении и сжатии справедлива гипотеза плоских сечений, все продольные волокна бруса удлиняются одинаково, следовательно, внутренние силы равномерно распределены по площади поперечного сечения. Величина нормального напряжения σ в поперечном сечении вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (11.1)$$

где F - площадь поперечного сечения.

В наклонных сечениях бруса возникают как нормальное σ_α , так и касательное τ_α напряжения, которые могут быть определены из уравнений равновесия части бруса (рис. 11.1,в)

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= P_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha; \\ \tau_\alpha &= P_\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

где $P_\alpha = \frac{P \cos\alpha}{F} = \sigma \cos\alpha$; P_α - напряжение в наклонной площадке.

Наибольшее по величине напряжение возникает в поперечном сечении бруса, которое и является расчетным. Основное уравнение расчета на прочность при растяжении и сжатии имеет вид

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

При растяжении (сжатии) длина бруса изменяется. Данные опыта показывают, что для большинства конструкционных материалов определенного предела удлинение бруса Δl прямо пропорционально растягивающей силе N :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \quad (11.2)$$

где l - длина бруса; Δl - полное удлинение бруса; E – упругая постоянная материала, называемая модулем Юнга или модулем упругости первого рода; EF - жесткость бруса при растяжении.

Эта закономерность была впервые установлена Гуком. Она справедлива при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности. Если N или F переменны по длине, то удлинение определяется как интеграл по длине бруса:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF}.$$

Задача расчетов на жесткость - выбрать размеры такими, чтобы удлинение бруса $\Delta \ell$ не превышало допускаемого удлинения $[\Delta \ell]$:

$$\Delta \ell \leq [\Delta \ell].$$

Относительной деформацией называется отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}.$$

(11.3)

С учетом (11.1) и (11.3) уравнение (11.2) можно преобразовать к следующему виду:

$$\sigma = E\varepsilon .$$

При растяжении и сжатии поперечные размеры бруса изменяются. Деформация в поперечном направлении ε' связана с продольной деформацией соотношением

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon ,$$

где μ - коэффициент поперечной деформации или коэффициент Пуассона.

Модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ характеризуют упругие свойства материала. Для стали: $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; для керамики: $\mu = 0,25 - 0,3$;

$$E = 4 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Работа, совершаемая растягивающей силой, при деформировании бруса переходит в потенциальную энергию деформации U . Согласно закону Гука (11.2) зависимость между удлинением $\Delta \ell$ и силой N - линейная. Следовательно, работа силы N на перемещении $\Delta \ell$ равна половине произведения наибольшего значения силы N на удлинение $\Delta \ell$:

$$A = U = \frac{1}{2}N\Delta \ell.$$

(11.4)

Подставив в (11.4) выражение (11.2), получим

$$U = \frac{N^2 \mathbf{l}}{2EF}.$$

Если нормальная сила N изменяется по длине стержня, то потенциальная энергия для участка длиной dz равна

$$dU = \frac{N^2 dz}{2EF},$$

а для всего стержня

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (11.5)$$

11.2. Расчет на прочность и жесткость при растяжении (сжатии) статически неопределимых систем

Для статически неопределимых систем характерно то, что они имеют дополнительные связи, которые вводят, как правило, для повышения прочности и жесткости конструкции. Число дополнительных связей определяет степень статической неопределимости системы.

Для нахождения внутренних силовых факторов в статически неопределимых системах уравнений статики недостаточно, поэтому составляют дополнительные уравнения на основании условия совместности и деформаций.

Рассмотрим пример расчета статически неопределимой системы. Брус AB , жестко закрепленный обоими концами (рис. 11.2,а), нагружен силой P . Данная система один раз статически неопределима. Обозначим силы реакций в заделках R_A и R_B . Из уравнения проекций всех сил на ось z имеем $R_A + R_B - P = 0$.

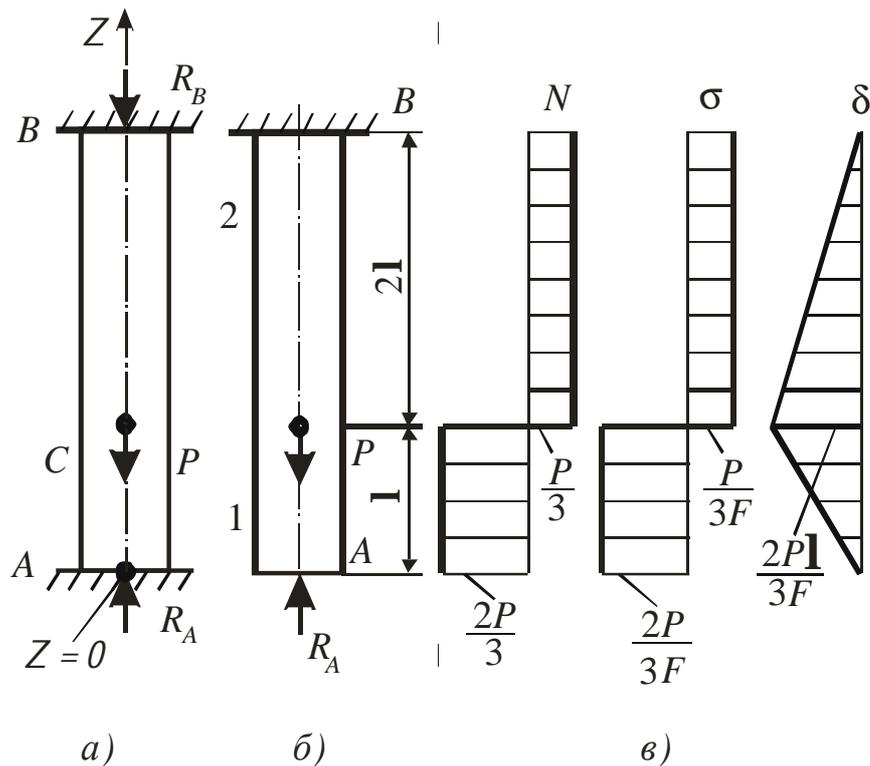


Рис.11.2

Для составления второго уравнения относительно R_A и R_B рассмотрим деформацию бруса (рис.11.2,б). Воспользуемся тем, что перемещение нижнего конца бруса по отношению к верхнему $\delta_{A/B}$ равно нулю:

$$\delta_{A/B} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = 0,$$

где $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2$ - удлинение участка 1 и 2.

Внутренние усилия на участках I и 2

$$N_1 = -R_A, \quad N_2 = -R_A + P.$$

Удлинение участков в соответствии с уравнением (11.2):

$$\Delta\ell_1 = -\frac{R_A \ell}{EF}; \quad \Delta\ell_2 = \frac{(-R_A + P)2\ell}{EF}.$$

Уравнение совместности деформаций принимает вид

$$\delta_{A/B} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = -\frac{R_A \ell}{EF} + \frac{(-R_A + P)2\ell}{EF} = 0.$$

Из этого уравнения находим $R_A = \frac{2}{3}P$.

Внутренние усилия, напряжения и удлинения по участкам равны:

$$N_1 = -\frac{2P}{3}; \quad N_2 = \frac{P}{3}; \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{F} = -\frac{2P}{3F}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{P}{3F};$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \ell}{EF} = -\frac{2P\ell}{3EF}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 2\ell}{EF} = \frac{2P\ell}{3EF}.$$

Эпюры N , σ , δ по длине стержня приведены на рис.11.2,в. Брус можно считать, достаточно прочным, если $|\sigma_1| < [\sigma]$.

11.3. Температурные напряжения

В статически неопределимых системах при нагреве и охлаждения возникают температурные напряжения. Рассмотрим примеры вычисления температурных напряжений.

Пример 1.

Брус, закрепленный концами A и B , равномерно нагрет на температуру Δt (рис. 11.3,а).

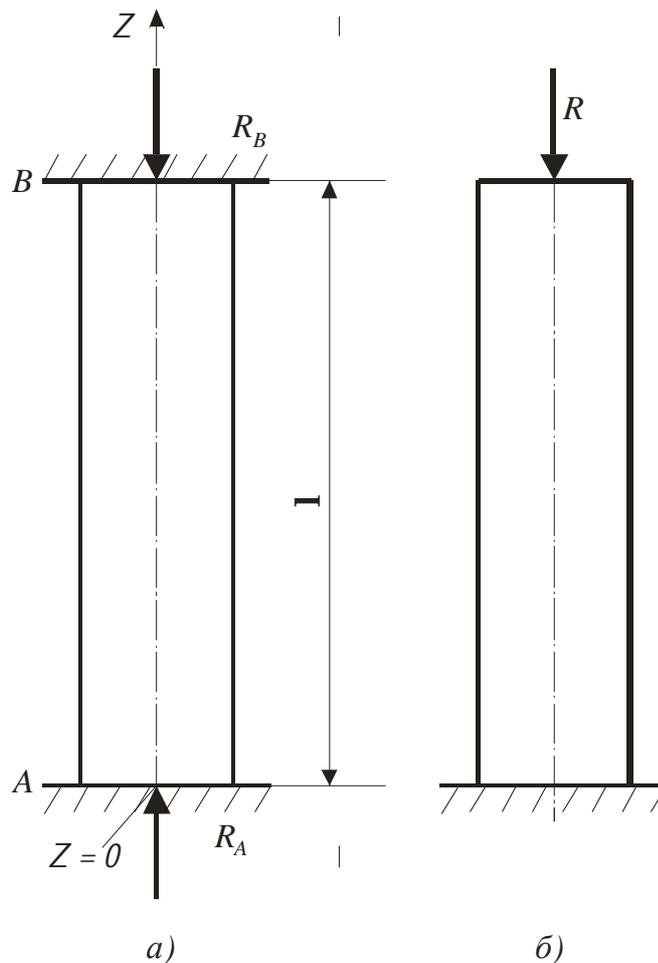


Рис.11.3

Так как расширению бруса при нагреве препятствуют заделки, то в брусѣ возникнут напряжения. Эти напряжения называют температурными. Для их определения необходимо найти силы реакций в заделках R_A и R_B .

Из уравнения проекций всех сил на ось бруса следует $R_A = R_B = R$.

Суммарное удлинение бруса от нагрева и от силы R (рис. 11.3,б) равно нулю:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t - \frac{Rl}{EF} = 0, \quad (11.6)$$

где α - КТЛР; l - длина бруса.

Из уравнения (11.6) следует

$$R = EF\alpha\Delta t.$$

Напряжение сжатия в брусѣ определяется по формуле

$$\sigma = \frac{R}{F} = E\alpha\Delta t.$$

Пример 2.

Выводы интегральных схем при распайке на плату нагревают от 20 до **180**⁰С ($\Delta t = 160$ ⁰С). Найти напряжения, возникающие в выводах, и коэффициент запаса прочности выводов. Выводы изготовлены из ковара в виде ленты шириной $b=0,5$ мм и толщиной $h_2=0,2$ мм, плакированной с обеих сторон никелем толщиной $h_2 = 0,05$ мм.

Модуль упругости и КТЛР никеля $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_1 = 13,3 \cdot 10^{-6}$ °С⁻¹; ковара $E_1 = 1,4 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha_2 = 5,9 \cdot 10^{-6}$ °С⁻¹.

Предел текучести для никеля $\sigma_{T1} = 200$ МПа, для ковара $\sigma_{T2} = 300$ МПа.

Расчетная схема вывода представлена на рис.11.4,а, где 1 - никель; 2 - ковар.

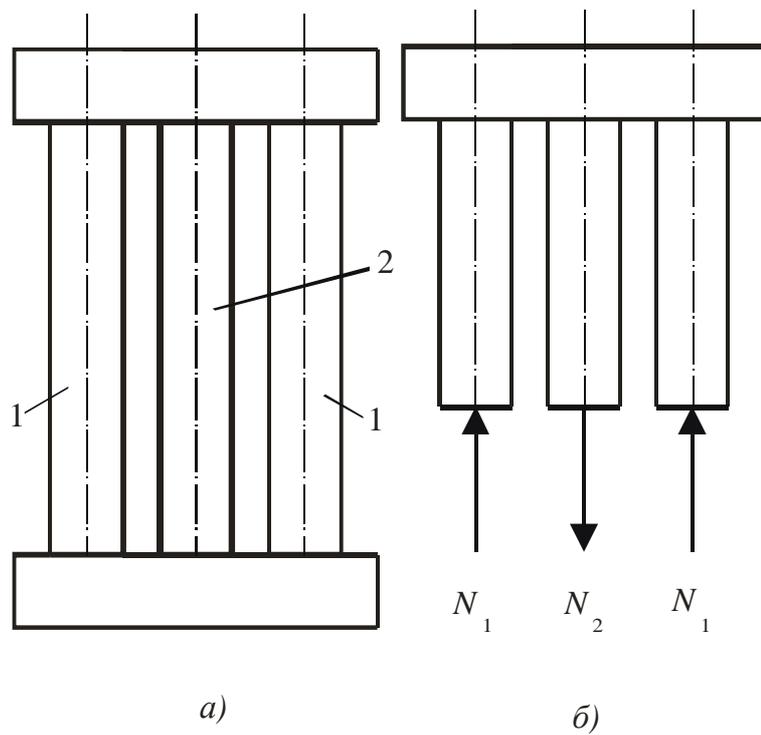


Рис.11.4.

Из-за разности КТЛР никеля и кобальта в выводе возникают внутренние силы: в кобальтовой ленте – сила N_2 , в слоях никеля - N_1 (рис.11.4.б).

Из условия равновесия следует

$$2N_1 = N_2. \quad (11.7)$$

Ввиду симметрии слои кобальта и никеля получают одинаковые удлинения

$$\Delta l_1 = \Delta l_2. \quad (11.8)$$

Удлинение Δl_1 и Δl_2 :

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \ell \Delta t - \frac{N_1 \ell}{E_1 F_1}, \quad (11.9)$$

$$\Delta l_2 = \alpha_2 \ell \Delta t + \frac{N_2 \ell}{E_2 F_2}.$$

Решение системы уравнений (11.7), (11.8) с учетом (11.9) дает величины сил N_1 и N_2 :

$$N_1 = \frac{(a_1 - a_2)\Delta t}{\frac{2}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_1 F_1}} = \frac{(13,9 - 5,9)10^{-6} \cdot 160}{\frac{2}{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \cdot 0,5} + \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,05 \cdot 0,5}} = 3,46 \text{ Н};$$

$$N_2 = 2N_1 = 6,92 \text{ Н}.$$

Напряжения в слоях вывода:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{3,46}{0,05 \cdot 0,5} = \mathbf{138,4 \text{ МПа}};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{6,92}{0,5 \cdot 0,2} = 69,2 \text{ МПа.}$$

Коэффициенты запаса для никеля $n_1 = \frac{200}{138,4} = 1,45$; для ковара $n_2 = \frac{300}{69,2} = 4,33$; общий коэффициент запаса прочности вывода $n = n_1 = 1,45$.

11.4. Устойчивость сжатых стержней

Тонкие стержни, воспринимающие продольные сжимающие силы, проверяют на устойчивость. Устойчивостью называют свойство системы сохранять свою первоначальную форму при действии нагрузки. Наибольшую величину сжимающей силы, при которой стержень сохраняет устойчивость, называют критической силой $P_{кр}$.

Потеря устойчивости может наблюдаться у продольно сжатых стержней, тонкостенных конструкций, пластин и оболочек. При потере устойчивости продольно сжатый стержень искривляется (рис.11.5).

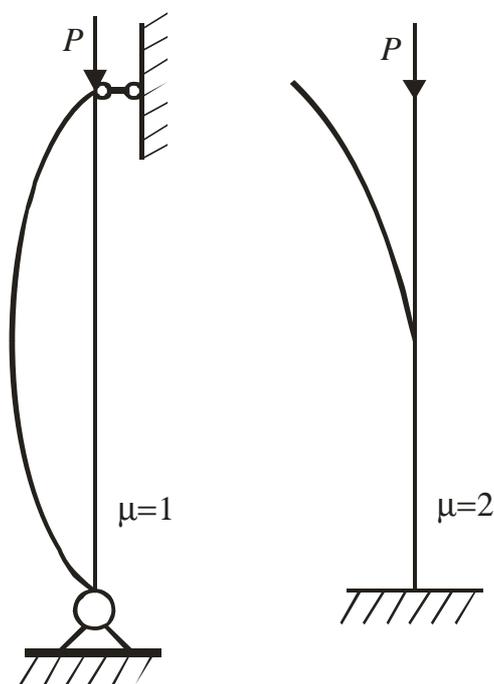


Рис 11.5

Проверку работоспособности элементов конструкции, находящихся под действием сжимающей нагрузки, проводят по допускаемым нагрузкам $[P]$

$$P \leq [P] = P_{кр}/n_y,$$

где n_y - запас устойчивости.

Для длинных тонких стержней $P_{кр}$ вычисляют по формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2} \quad (11.10)$$

где J_{\min} – минимальный момент инерции поперечного сечения; μ - коэффициент приведения длины, который зависит от условий закрепления стержня; для консольно закрепленного стержня $\mu = 2$; для стержня с шарнирно закрепленными концами $\mu = 1$ (рис.11.5); ℓ - длина стержня.

Формула (11.10) справедлива при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности. Гибкостью стержня называют величину

$$\lambda = \mu \ell / i,$$

где $i = \sqrt{J_{\min}/F}$ - минимальный радиус инерции и F - площадь поперечного сечения.

Формула (11.10) справедлива, если гибкость удовлетворяет условию

$$\lambda > \lambda_{кр}$$

где $\lambda_{кр}$ – критическая гибкость стержня.

$$\lambda_{кр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{п}}},$$

где $\sigma_{п}$ - предел пропорциональности.

Лекция 12. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ

12.1 Испытания стандартных образцов

Расчет на прочность и жесткость основан на экспериментальных сведениях о прочности, упругости и пластичности материалов.

Прочность - способность материала сопротивляться действию нагрузки без разрушения или образования остаточных деформаций.

Упругость - свойство материала восстанавливать первоначальную форму после снятия нагрузки.

Пластичность - способность материала необратимо изменять свою форму без разрушения, т.е. получать остаточные деформации.

Механические характеристики материалов определяют, как правило, по результатам испытания образцов на растяжение или сжатие. При испытаниях используют образцы, форма и размеры которых регламентированы ГОСТом.

Наиболее распространены цилиндрические и плоские образцы, представленные на рис. 12.1.

Цилиндрические образцы (рис. 12.1,а) имеют удлиненный рабочий участок (d_0 и l_0 - его диаметр и длина) и утолщенные концевые части, служащие для закрепления в захватах испытательной машины.

Для уменьшения концентрации напряжений сопряжения рабочей части образца с концевой делают скругленными, цилиндрическими ступенчатыми (рис.12.1,а) или коническими (рис. 12.1,б).

Стандартные образцы имеют следующие размеры: $d_0 = 5; 6; 8; 10$ мм;
 $l_0 = 10d_0$ (десятикратный образец); $l_0 = 5d_0$ (укороченный пятикратный образец); $l_1 = 1,1l_0$.

Плоские образцы применяют для определения механических характеристик листового материала. Размеры стандартных плоских образцов (рис. 12.1,в), $b_0 = 20$ мм, (при $h_0 \leq 3$ мм) или 30 мм (при $3 < h_0 \leq 6$ мм), $l_0 = 11,3\sqrt{b_0h_0}$.

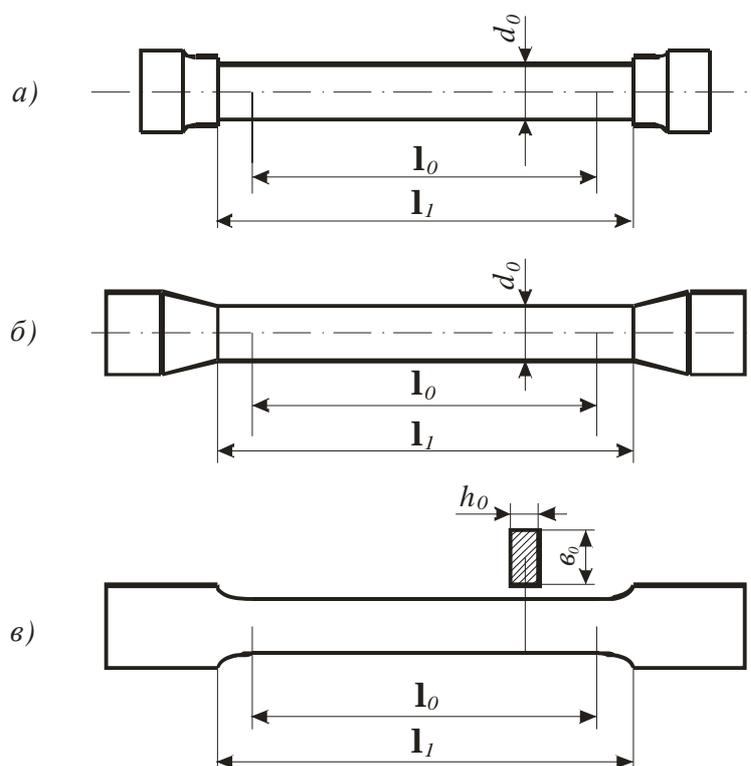


Рис.12.1.

Испытания проводят на машинах, позволяющих измерять усилие в образце и его удлинение в процессе испытаний. В результате испытаний получают диаграмму растяжения, вид которой для пластичного материала показан на рис. 12.2.

На участке OA сила пропорциональна удлинению - в образце возникает только упругая деформация.

Выше точки A возникает также пластическая деформация и прямо пропорциональная зависимость силы от удлинения нарушается. На участке BC удлинение образца увеличивается без заметного изменения силы P - наблюдается явление текучести.

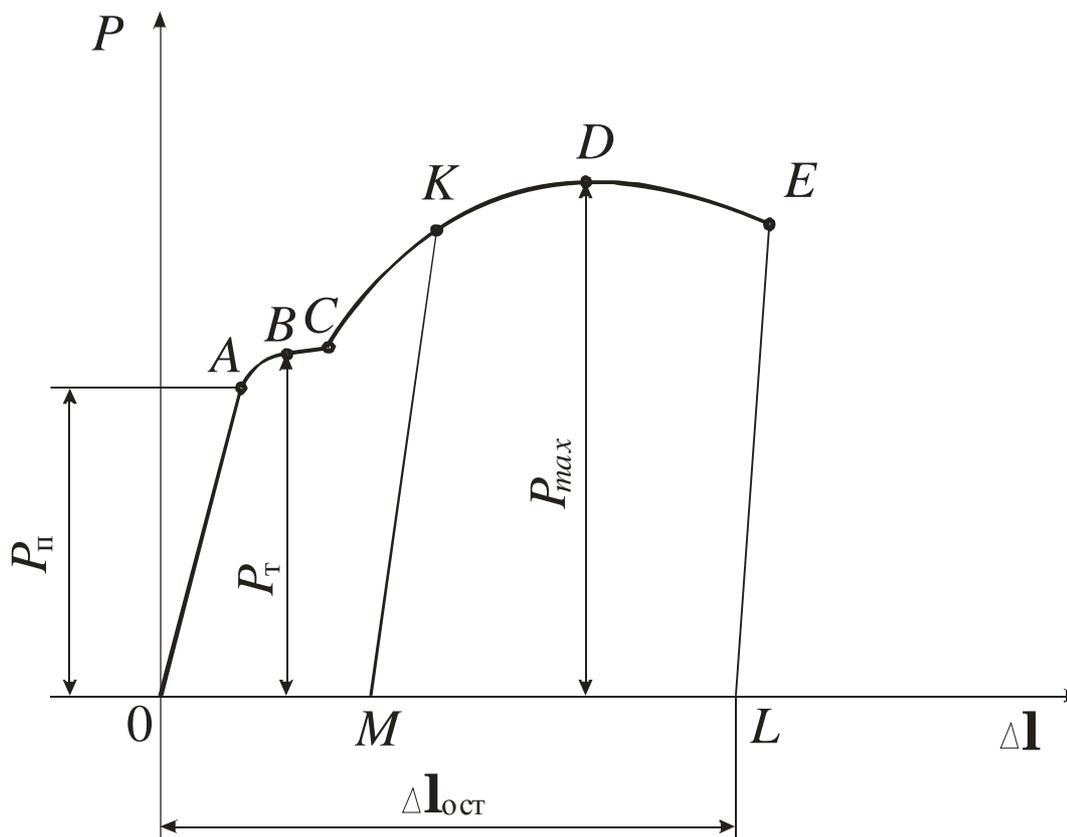


Рис.12.2.

На участке CD , называемом участком упрочнения, возникают как упругие, так и пластические (необратимые) деформации. При нагружении до точки K , расположенной между точками C и D , и последующем снятии нагрузки линия разгрузки KM проходит параллельно линии OA . При повторном нагружении прямо пропорциональная зависимость соблюдается до точки K , т.е. до большего значения силы, чем при начальном нагружении. В этом случае образец как бы упрочняется. Это явление называют наклепом и широко используют в технике для упрочнения материалов путем пластического деформирования.

Начиная с точки D , в образце возникают интенсивные местные пластические деформации, локализующиеся в узкой зоне, называемой "шейкой". Точка E соответствует моменту разрыва образца. Разрушенный образец имеет минимальный диаметр в зоне "шейки" $d_{ш}$; длина образца после разрыва больше первоначальной на величину остаточного удлинения $\Delta l_{ост}$. Линия разгрузки после разрушения EL параллельна OA . По значениям усилий $P_{п}$, $P_{т}$, P_{max} (рис 12.2), соответствующим точкам A , B , D на диаграмме, вычисляют характеристики прочности. К характеристикам прочности относятся: предел пропорциональности $\sigma_{п}$, предел текучести $\sigma_{т}$,

предел прочности или временное сопротивление разрушению σ_b . Величины характеристик прочности определяют по формулам:

$$\sigma_{п} = P_{п}/F_0; \sigma_{т} = P_{т}/F_0; \sigma_b = P_{max}/F_0, \text{ где } F_0 = \pi d_0^2/4 -$$

первоначальная площадь поперечного сечения образца.

Для конструкций, к которым предъявляются жесткие требования в отношении их веса, используют характеристику, называемую удельной прочностью $\sigma_b = \sigma_b/\gamma$, где γ – удельный вес материала.

Характеристиками пластичности материала являются относительное остаточное удлинение после разрыва δ и относительное остаточное поперечное сужение ψ .

$$\delta = \frac{\Delta l_{ост}}{l_0} 100\%;$$

$$\psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} 100\%,$$

где $F_{ш} = \frac{\pi d_{ш}^2}{4}$.

Характеристики упругих свойств материалов: модуль упругости первого рода E и коэффициент Пуассона μ , определяют при нагружении образцов в пределах пропорциональности. Диаграмма растяжения для определения упругих постоянных, как правило, непригодна из-за недостаточной точности измерения удлинения. Поэтому величины E и μ определяют из специальных опытов, используя для измерения деформаций тензометры.

Деформации материала при растяжении измеряют в продольном и поперечном направлениях. Величины E и μ вычисляют по формулам

$$E = \frac{\Delta P}{F_0} \Delta \varepsilon;$$

$$\mu = \frac{|\Delta \varepsilon_n|}{|\Delta \varepsilon|},$$

где $\Delta\varepsilon$ и $\Delta\varepsilon_{\perp}$ - приращения относительных деформаций в продольном и поперечном направлениях, соответствующие приращению нагрузки.

Характеристики прочности пластичных материалов при растяжении и сжатии, как показывает опыт, практически одинаковы. У хрупких материалов характеристики прочности при сжатии обычно значительно выше, чем при растяжении. Установлено, что весьма пластичные материалы могут быть сжаты до сколь угодно больших усилий без разрушения, хрупкие материалы разрушаются без существенных пластических деформаций. За характеристику прочности пластичных материалов при сжатии принимают предел текучести. Прочностные свойства хрупких материалов при сжатии характеризуют пределом прочности. Поскольку предел прочности при сжатии выше чем при растяжении, то вводятся следующие обозначения: $\sigma_{вр}$ - предел прочности при растяжении; $\sigma_{вс}$ - предел прочности при сжатии. Аналогичные обозначения применяют для предела текучести $\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тс}$. Некоторые материалы не имеют ярко выраженного предела пропорциональности и предела текучести. В этом случае их определяют по специальным критериям, регламентированным ГОСТом. За предел пропорциональности принимают напряжение, при котором угол наклона касательной к диаграмме растяжения в 1,5 раза меньше, чем на начальном участке. За предел текучести принимают напряжение, при котором остаточная относительная деформация достигает величины 0.2%, в этом случае его обозначают $\sigma_{0.2}$. Характеристики прочности, определенные по этим критериям, называют условными.

Механические характеристики некоторых материалов, часто используемых в микроэлектронике, приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Материал	σ_{mp} , МПа	σ_{mc} , МПа	σ_{gp} , МПа	δ %,	$E \times 10^5$, МПа
Сталь малоуглеродистая	250	250	390	42	2,0
Сталь 45 закаленная	1040	970	1080	13	2,0
Латунь	330	330	450	17	1,1
Медь прутковая	250	250	320	15	1,1

Дюраль	340	340	540	13	0,75
Титан техниче- ский	520	520	600	23	1,17
Текстолит	75	115	127	1,5	0,03
Гетинакс	-	-	90	-	0,1
Вольфрам прово- лока $d=1,0$ мм	-	-	1870	1,0	3,5
Молибден прово- лока $d=0,04$ мм	-	-	1250	3,0	3,18
Тантал	-	-	204	36	1,9
Ниобий	-	-	289	29,3	1,07
Никель (лист)	130	-	470	-	2,2
Фени Н42	220	-	550	-	1,5
Фени Н46	240	-	580	-	1,6
Ковар 29НК	350	-	550	-	1,35

Примечание: для текстолита $\sigma_{\text{вс}}=168$ МПа, для гетинакса $\sigma_{\text{вс}}=29$ МПа.

12.2. Испытания материалов микроэлектронной техники

В конструкциях ИС широко используются проволока диаметром 30-50 мкм, тонкопленочные покрытия толщиной несколько микрометров, тонколистовой материал толщиной 10 - 100 мкм, весьма хрупкие кремниевые пластины, различные сорта керамик. Испытания этих материалов с целью измерения механических характеристик имеют некоторые специфические особенности.

Тонкие проволоки, листы и пленки испытывают только на растяжение. Размеры образцов стандартом не установлены и регламентируются нормами, действующими на отдельных предприятиях или в отрасли. Рабочую длину образцов

проволоки выбирают в диапазоне от 5 - 6 до 20 - 30 мм. Образцы пленки имеют ширину 2 - 3 мм и длину 10 - 15 мм, образцы листового материала - ширину 5 - 6 мм, длину 60 - 70 мм.

Образцы проволоки и пленки 1, представленные на рис. 12.3, приклеивают к специальной оправке 2 для того, чтобы исключить их коробление при установке в захватах разрывной машины.

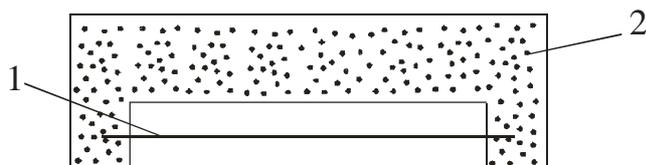


Рис.12.3.

После закрепления в захватах разрывной машины оправку, изготовленную из металлической фольги, разрезают так, что нагружению подвергается только образец испытуемого материала.

Для более надежного закрепления тонколистового материала на концах образцов с обеих сторон приклеивают полосы толстой бумаги или металлической фольги.

Для испытаний образцов тонкой проволоки, пленки и тонколистового материала применяют машины с максимальной величиной усилия от 10^{-2} до 10 Н. В устройствах для измерения усилий и удлинений обычно используют электротензодатчики. Схема такой испытательной машины представлена на рис. 12.4.

Образец 1 устанавливают в захватах 2 и 4; захват 2 помещают на консольной упругой пластине 3, а захват 4 - на подвижном рычаге нагружающего устройства 5.

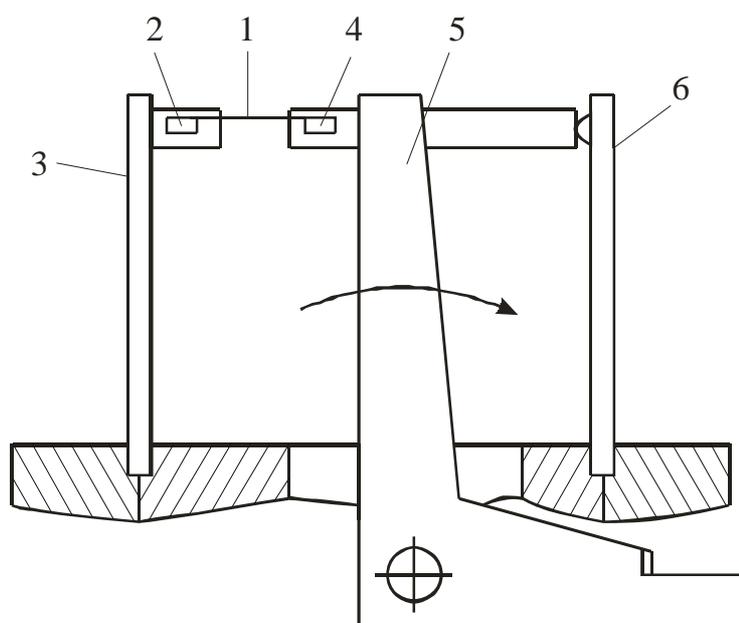


Рис.12.4.

Усилие в образце измеряется по величине прогиба пластины 3, удлинение - по разности прогибов пластин 6 и 3. Для измерения прогибов пластин используются тензодатчики, подключаемые к двухкоординатному самописцу, вычерчивающему диаграмму растяжения.

Испытания на растяжение хрупких материалов практически не проводят, поскольку при закреплении в захватах испытательных машин образцы этих материалов обычно разрушаются.

Для исследования прочности полупроводниковых материалов (кремний, германий) широко используют различные схемы изгиба. Испытаниям подвергаются как плоские прямоугольной формы брусья, так и круглые тонкие пластины.

Образцы в виде прямоугольных брусьев испытывают по схеме трехточечного (рис. 12.5,а) или четырехточечного изгиба (рис. 12.5,б). Последняя схема предпочтительнее, поскольку в средней части образца изгибающий момент постоянен и напряженное состояние по длине однородное. При испытаниях на изгиб определяют максимальное усилие, при котором происходит разрушение P_{max} , и по нему вычисляют предел прочности.

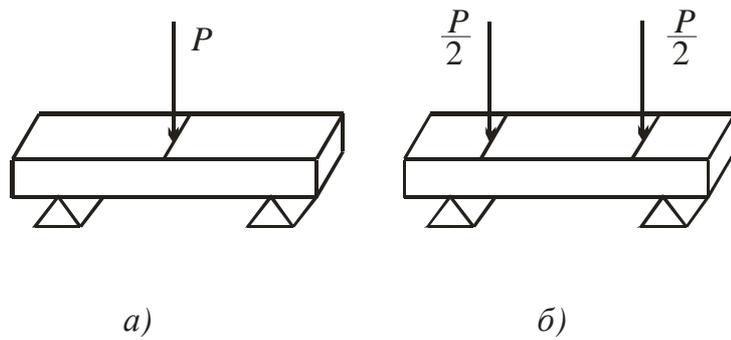


Рис.12.5.

Круглые пластины 1 рис. 12.6 испытывают на осесимметричный изгиб, устанавливая их на кольцевую опору 3 и нагружая с помощью кольцевого пуансона 2. В опытах определяют разрушающее усилие P_{max} , по которому вычисляют максимальный изгибающий момент и условный предел прочности.

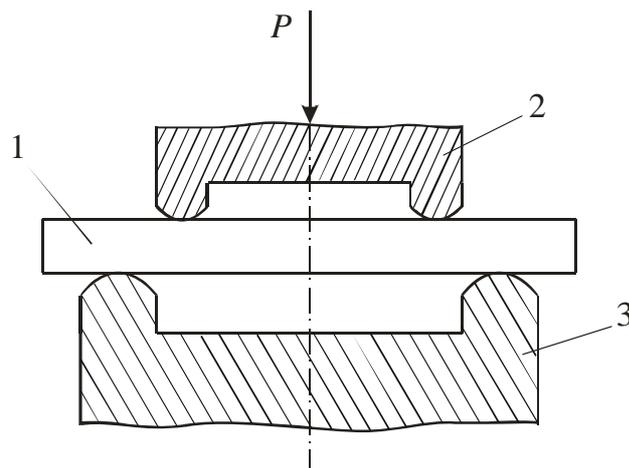


Рис.12.6.

Хрупкие образцы иногда испытывают также на кручение. Схема испытаний на кручение показана на рис. 12.7. Образец 1 с закрепленными на нем рычагами 2 установлен на опоры 3. При действии нагрузки на рычаги в образце возникает момент $M = 0,5Pa$. В опытах определяют разрушающий крутящий момент M_{max} , по которому вычисляют условный предел прочности.

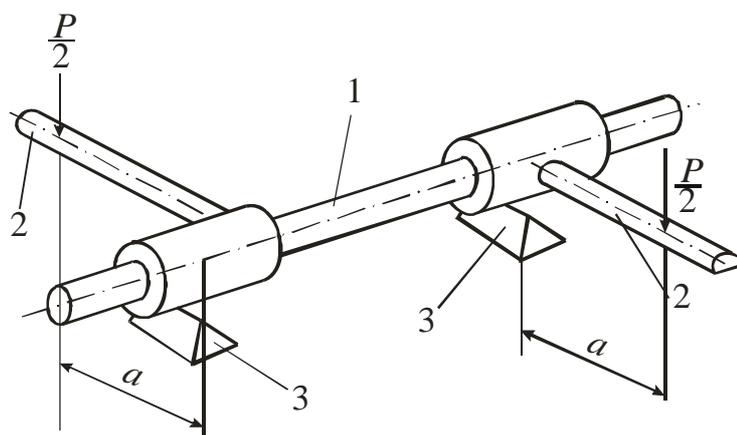


Рис.12.7.

Значения механических характеристик некоторых полупроводниковых и керамических материалов приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Характеристика	Кремний	Германий	Поликор	Керамика 22ХС	Стекло
Прочность на изгиб, МПа	930 -1000	550-900	250	400	132
$\sigma_{вр}$, МПа	-	-	-	130	60
$\sigma_{сс}$, МПа	-	-	-	1100	550
$E \times 10^5$, МПа	1,09	-	3,92	2,55	0,62

Примечание: прочность на кручение для стекла 65 МПа

В табл. 12.3 даны характеристики алюминиевой и золотой проволоки, а также алюминиевой пленки, используемых при сборке ИС.

Таблица 12.3

Материал	σ_s , МПа	$E \times 10^5$, МПа	δ , %
Алюминий проволока $d = 0,03$ мм	350	0,85	1

Золото проволока $d = 0,03$ мм	120 - 350	-	0,8
Алюминий пленка толщиной 7мкм	230	0,75	0,5

12.3. Влияние факторов температуры и времени на механические характеристики материалов

Изделия микроэлектроники и технологическое оборудование для их производства часто находятся в условиях повышенных или пониженных температур, а также интенсивных динамических нагрузок. Механические характеристики материалов существенно зависят от температуры (нагрева или охлаждения) и скорости нагружения.

На рис. 12.8 показана зависимость механических характеристик стали 34ХНЗМ от температуры. Величины $\sigma_b, \sigma_{0,2}, E$ при увеличении температуры уменьшаются, а ψ, δ сначала уменьшаются, а затем возрастают. Для других материалов зависимости изменяются более монотонно.

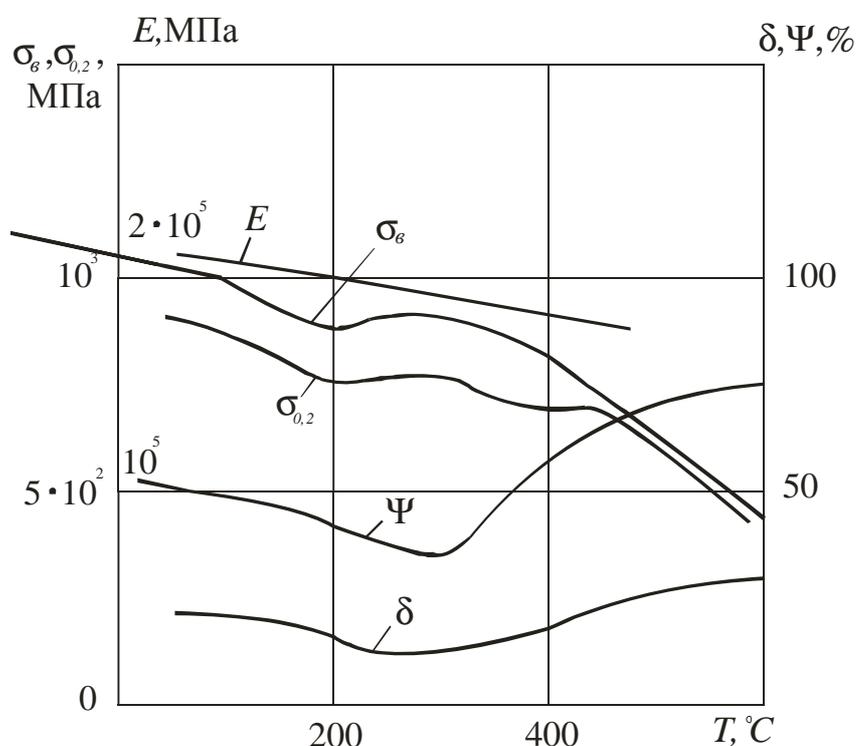


Рис.12.8.

Кроме того, под воздействием температуры наблюдается явление нарастания во времени пластической деформации в деталях, находящихся в напряженном состоянии, которое носит название ползучести. У некоторых материалов (свинец, медь) ползучесть проявляется при нормальной температуре. У стали ползучесть особенно сильно проявляется при повышенной температуре. В статически неопределимых системах ползучесть сопровождается перераспределением напряжений. При расчете на прочность при повышенной температуре и на ползучесть используют следующие характеристики прочности: $\sigma_{пл}$ - предел ползучести; $\sigma_{дл}$ - предел длительной прочности.

Пределом ползучести $\sigma_{пл}$ называется напряжение, при котором пластическая деформация при заданной температуре за определенный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями.

Пределом длительной прочности $\sigma_{дл}$, называется отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через определенный промежуток времени, к первоначальной площади поперечного сечения. Величина $\sigma_{дл}$ зависит от температуры и заданного промежутка времени.

Для определения этих характеристик используют кривые ползучести - зависимости пластической деформация ϵ_c от времени t при постоянном напряжении σ . Кривые ползучести для стали ЭИ756 при температуре 600°C показаны на рис. 12.9.

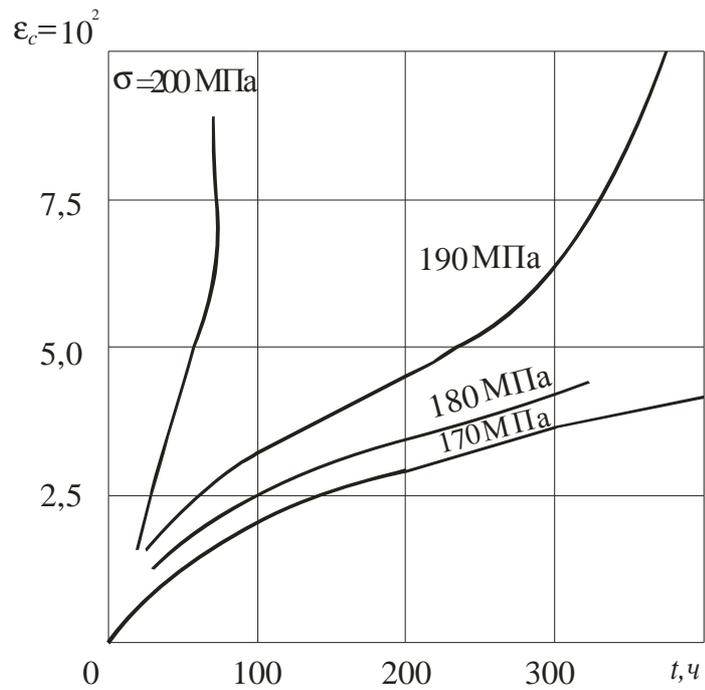


Рис.12.9.

Механические характеристики некоторых материалов зависят от скорости нагружения $d\epsilon/dt$. Изменение предела прочности для меди при различных температурах показано на рис. 12.10. Стандартные испытания проводят при скоростях деформации 0,01 - 3 единиц относительной деформации в минуту.

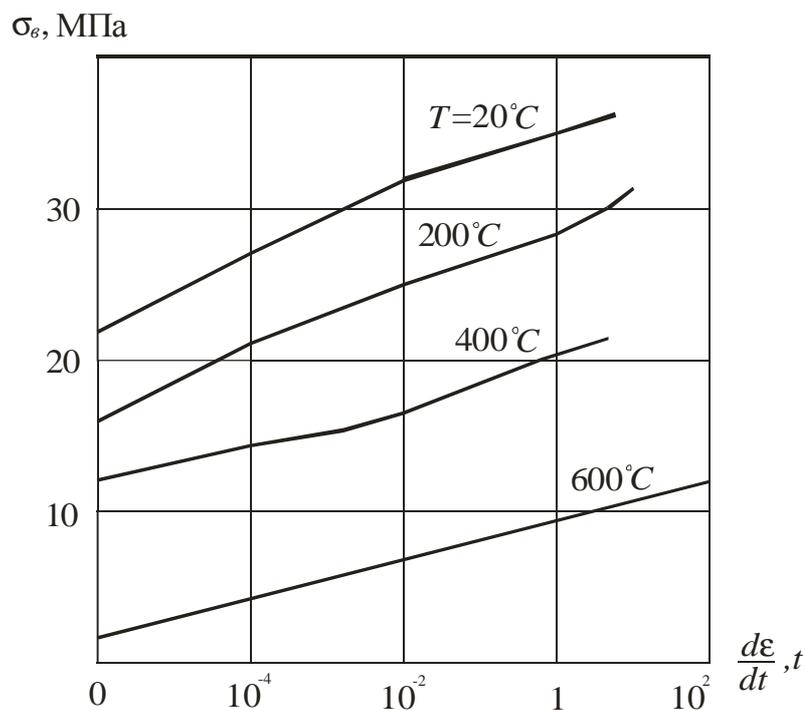


Рис.12.10.

Для ИС характерно, что в них применяются соединения разнородных материалов, в которых могут возникать температурные напряжения. Величина их определяется, прежде всего, разностью термических коэффициентов линейного расширения (ТКЛР) α , соединяемых материалов, их упругими свойствами и перепадом температур.

Значения характеристик σ_T , E и α некоторых материалов при различных температурах приведены в табл. 12.4 и 12.5.

12.4 Расчет на прочность

Расчеты на прочность ведутся либо по допускаемым напряжениям, либо по коэффициенту запаса прочности.

Под коэффициентом запаса прочности n понимают отношение предельного напряжения σ_L к максимальному σ_{max}

$$n = \frac{\sigma_L}{\sigma_{max}}. \quad (12.1)$$

Для пластичных материалов под σ_L понимают предел текучести σ_T , для хрупких материалов - предел прочности σ_B .

Прочность считают обеспеченной, если

$$n \geq [n], \quad (12.2)$$

где $[n]$ - рекомендуемое значение коэффициента запаса.

Величина $[n]$ задается принятыми в данной отрасли нормами проектирования и обычно находится в диапазоне от 1,5 до 2.

Под допускаемым напряжением $[\sigma]$ понимают отношение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_L}{[n]}. \quad (12.3)$$

Конструкцию считают прочной, если

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (12.4)$$

Различают два вида расчетов на прочность: проектировочный и проверочный.

При проектировочном расчете подбирают размеры поперечного сечения детали или материал.

Проверочный расчет проводят в тех случаях, когда размеры конструкции, действующие силы и материал определены и требуется убедиться, что конструкция удовлетворяет условиям прочности. В этом случае используют условия (12.1) и (12.2), если проверяют прочность по коэффициенту запаса, или условия (12.3) и (12.4), если проводят проверку по допускаемым напряжениям.

Конкретно эти вопросы рассмотрены в разделах, посвященных расчетам деталей на растяжение, кручение и изгиб.

Лекция 13. КРУЧЕНИЕ

13.1. Кручение элементов конструкций. Напряженное состояние при кручении

Кручение возникает при нагружении конструктивных элементов роботоманипуляторов, монтажной арматуры технологического оборудования, выводов ИС, валов передач в тех случаях, когда внешние силы, действующие на конструктивный элемент, создают момент, относительно его продольной оси.

При кручении в поперечных сечениях возникают внутренние крутящие моменты M_k (рис. 13.1).

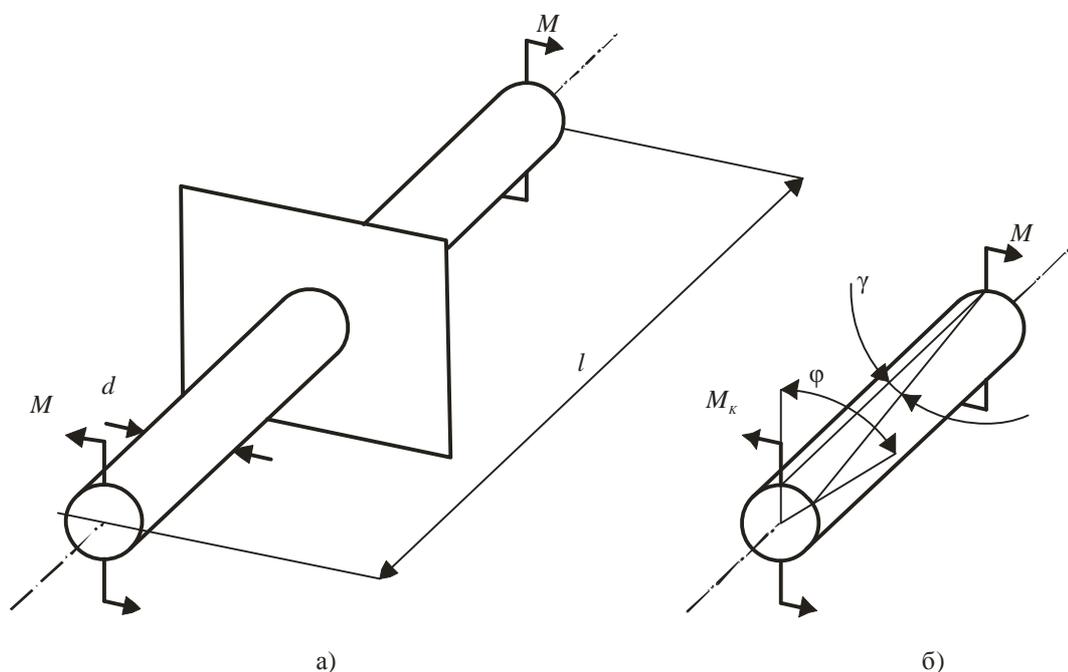


Рис. 13.1

Поперечные сечения бруса при кручении поворачиваются относительно друг друга, а образующие цилиндра превращаются в винтовые линии.

Если поперечное сечение круглое, то оно остается плоским. В этом случае угол наклона образующей равен углу сдвига. На рис. 13.1 показан угол закручивания φ и угол сдвига γ .

Напряженное состояние при кручении по сечению бруса неоднородно. Поэтому при изучении особенностей напряженного состояния целесообразно рас-

смотреть простейший случай - кручение тонкостенной трубы, в которой напряженное состояние по толщине стенки можно считать однородным (рис. 13.2,а).

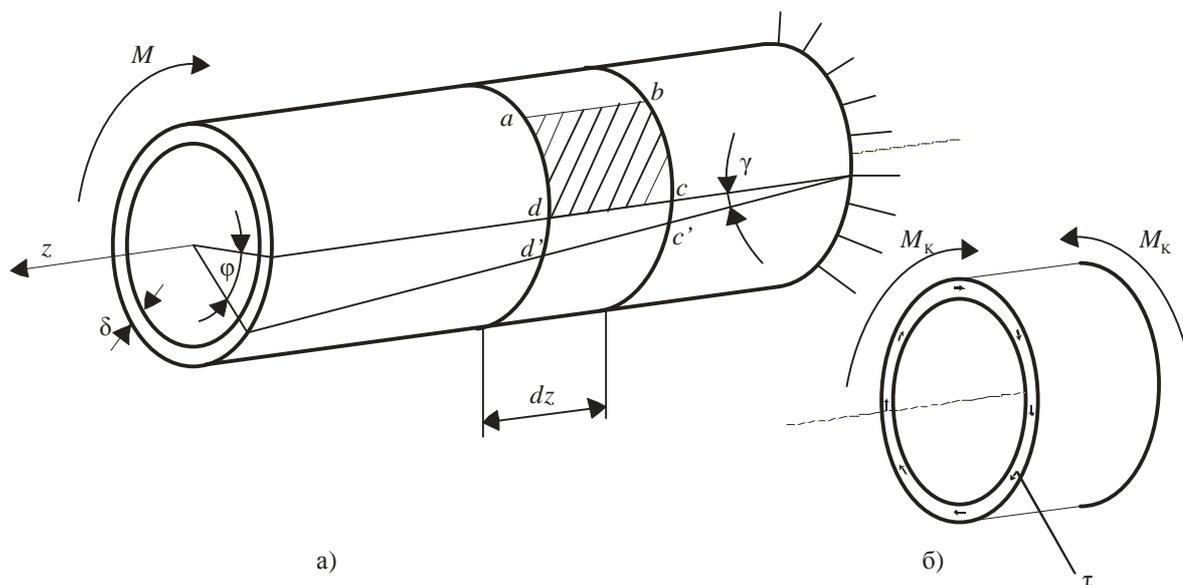


Рис. 13.2

В поперечных сечениях действуют касательные напряжения τ (рис. 13.2,б), равномерно распределенные по толщине стенки и по контуру сечения.

Моменты от касательных напряжений τ при суммировании по всему сечению приводятся к внутреннему крутящему моменту M_k (рис. 13.2,б).

Касательные напряжения возникают не только в поперечных, но и в продольных сечениях. Величины их связаны между собой законом парности касательных напряжений.

Согласно закону парности касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках перпендикулярны к общему ребру и возникают одновременно, равны по величине и направлены или оба к ребру, или оба от ребра. Этот закон справедлив при любых видах нагружения и является общим законом механики деформируемого тела.

Для доказательства закона парности рассмотрим равновесие элемента выделенного из бруса двумя осевыми и двумя поперечными сечениями (рис. 13.3,а). Предположим, что в грани ad действует напряжение τ , в грани dc - напряжение τ_1 .

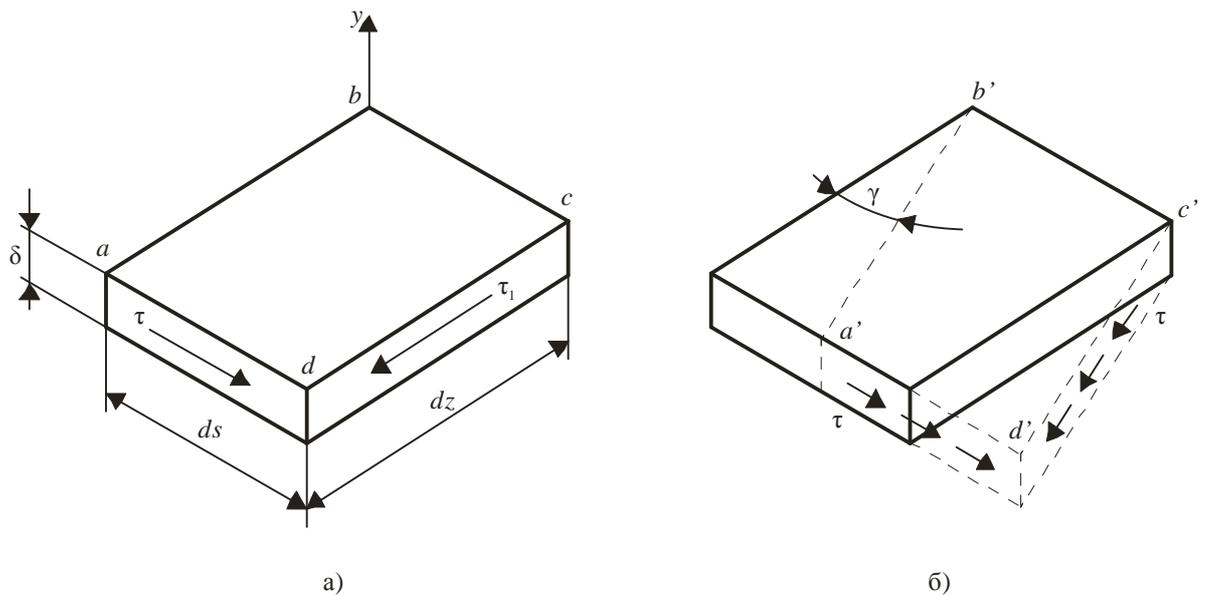


Рис. 13.3

Составим уравнение моментов сил относительно оси y , перпендикулярной поверхности $abcd$

$$\sum M_y = 0, \tau(\delta ds)dz - \tau_1(\delta dz)ds = 0.$$

После преобразований имеем $\tau = \tau_1$. Напряженное состояние при кручении бруса, характеризующееся тем, что в поперечных и продольных сечениях возникают одинаковые касательные напряжения, называют чистым сдвигом. При чистом сдвиге прямые углы между гранями элемента искажаются (рис. 13.3, б). Изменения прямых углов, выраженные в радианах, называют угловой деформацией γ . До предела пропорциональности величины τ и γ связаны между собой прямо пропорциональной зависимостью, называемой законом Гука при сдвиге

$$\tau = \gamma G, \quad (13.1)$$

где G - константа материала, называемая модулем упругости второго рода.

Между модулями упругости первого и второго рода E и G существует зависимость

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

В наклонных площадях при чистом сдвиге действуют как касательные, так и нормальные напряжения, в площадках, расположенных под углом 45° и 135° к оси бруса, имеют место только нормальные напряжения (рис. 13.4), причем $\sigma_{45^\circ} = \tau$, $\sigma_{135^\circ} = \tau_1$.

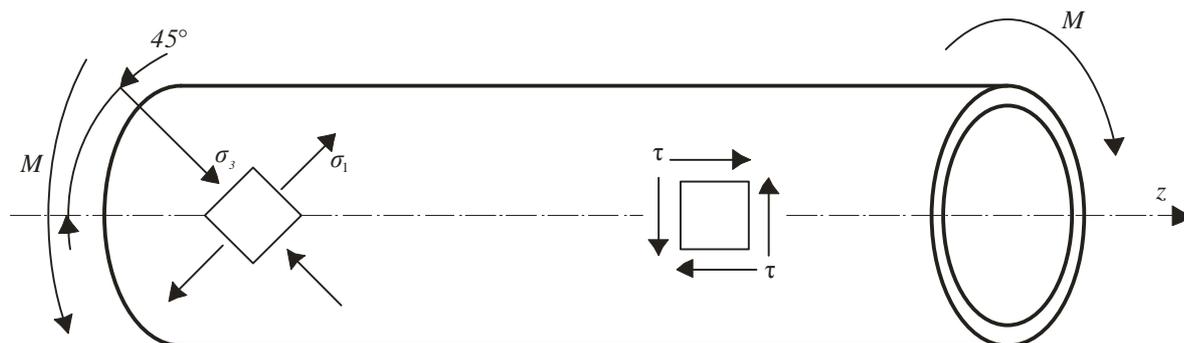


Рис. 13.4

Поскольку эти напряжения имеют разные знаки, то квадрат, нанесенный на поверхность бруса под углом 45° к оси, вытягивается в прямоугольник.

При кручении бруса из хрупкого материала разрушение происходит по винтовой поверхности, на которой нормальные напряжения имеют максимальное значение; разрушение бруса из пластичного материала происходит по плоскости поперечного сечения, в которой действуют максимальные касательные напряжения.

Сдвиг и срез. Напряженное состояние - чистый сдвиг, возникает в сварных и паяных соединениях при нагружении в плоскости соединения, а также в шпоночных, заклепочных и шлицевых соединениях, передающих сдвигающие нагрузки.

Схема паяного соединения вывода 1 к корпусу 2 ИС показана на рис. 13.5, Под действием силы P в припое возникают напряжения среза $\tau_{\text{ср}}$.

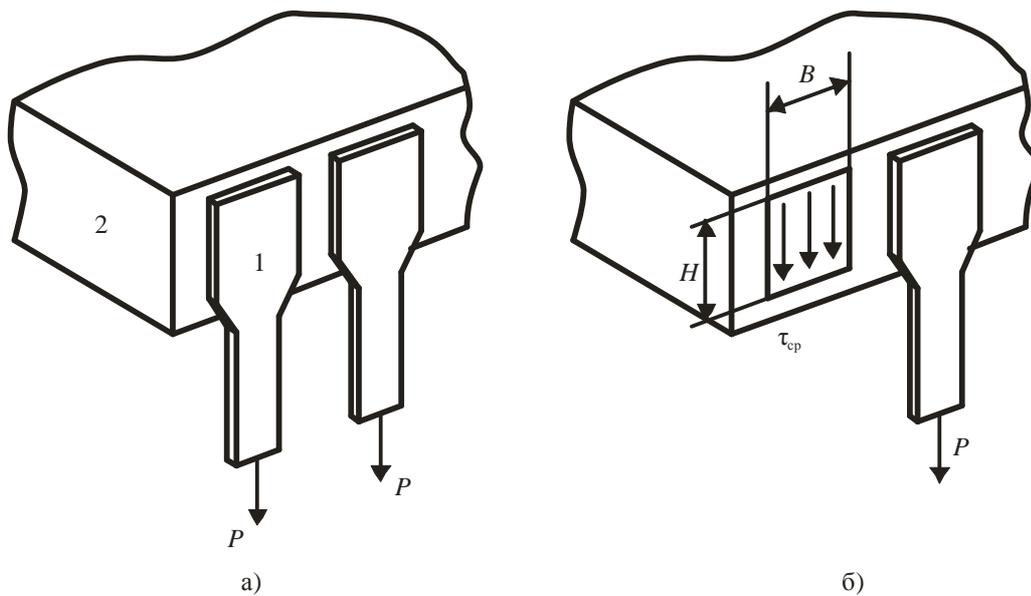


Рис. 13.5

Принимая условно, что $\tau_{ср}$ равномерно распределено по поверхности соединения, получаем

$$\tau_{ср} = \frac{P}{bH}. \quad (13.2)$$

В шпонке 1 шпоночного соединения вала 2 с втулкой 3 рис. 13.6 под действием момента M возникают напряжения среза $\tau_{ср}$.

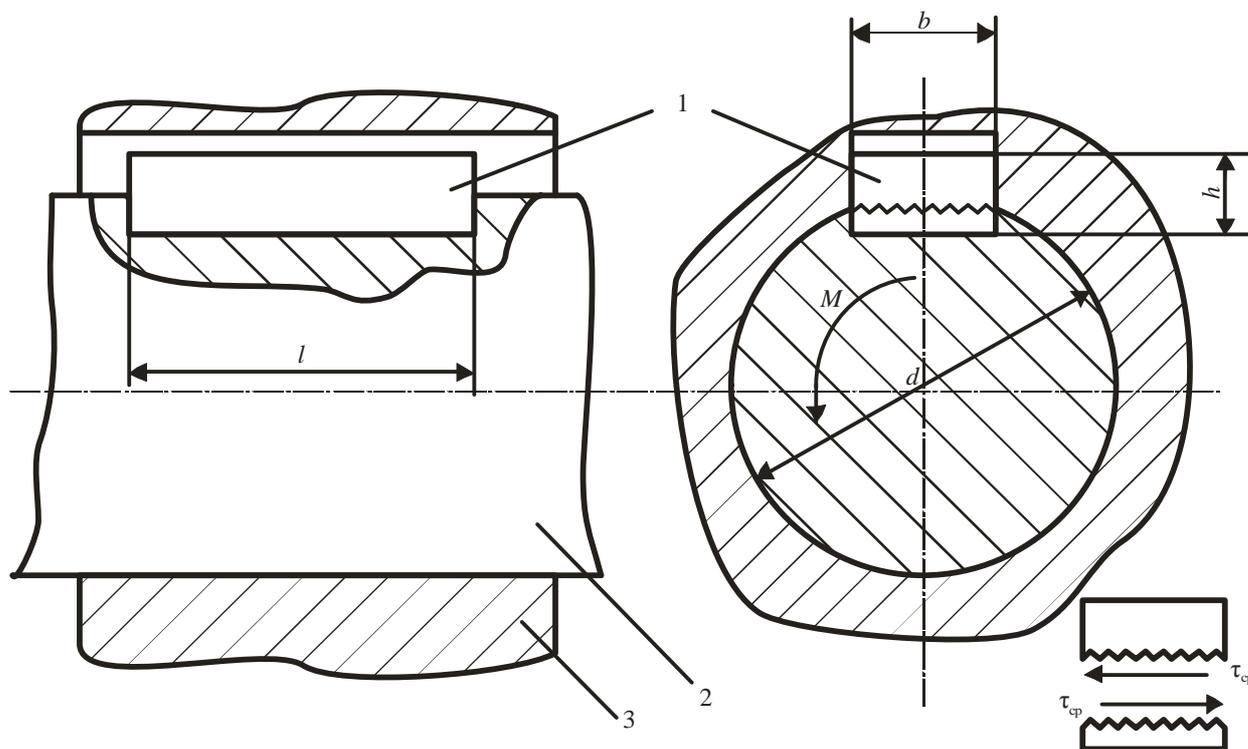


Рис. 13.6

При практических расчетах принимают, что $\tau_{\text{ср}}$ равномерно распределены по поверхности среза. Тогда

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4M}{d(l-b)b},$$

где d - диаметр вала; l , b - длина и ширина шпонки (в расчетах учтено скругление торцов шпонки).

Соединение считается прочным, если

$$\tau_{\text{ср}} \leq [\tau]_{\text{ср}}.$$

Величина допускаемого напряжения на срез $[\tau]_{\text{ср}}$ определяется экспериментально.

13.2. Кручение сплошного бруса круглого поперечного сечения

При кручении брусьев круглого поперечного сечения справедливы следующие положения: плоские поперечные сечения, поворачиваясь при деформации вокруг оси бруса, остаются плоскими; радиусы всех поперечных сечений остаются прямыми (не искривляются). Согласно этим положениям поперечные сечения брусьев поворачиваются подобно жестким дискам, насаженным на одну ось. Длина круглого цилиндра и его диаметр при кручении остаются постоянными $d = \text{const}$, $l = \text{const}$ (рис. 13.1).

Для вывода расчетных зависимостей рассмотрим элемент, выделенный из бруса (рис. 13.7,а) двумя осевыми сечениями под углом φ и двумя поперечными сечениями на расстоянии dz . Под действием крутящего момента M верхняя часть элемента смещается относительно нижней на угол закручивания $d\varphi$, образуя KL отклоняется на угол сдвига γ (рис. 13.7,б).

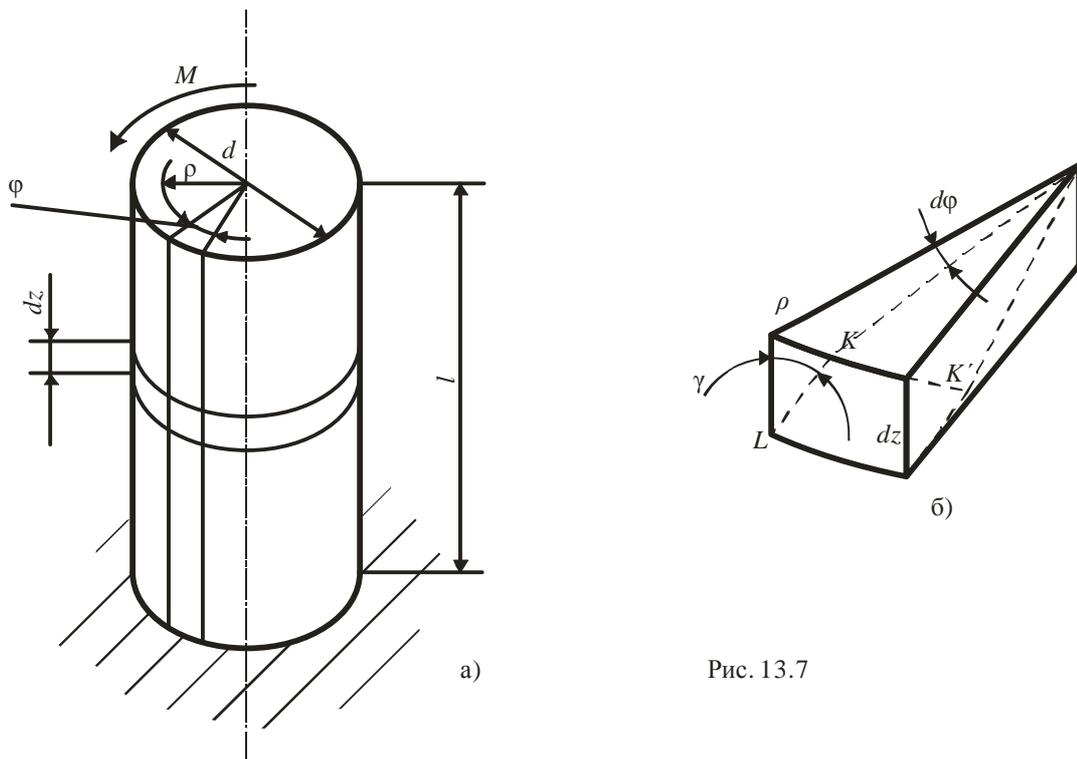


Рис. 13.7

Учитывая сформулированные выше положения и считая углы $d\varphi$, γ малыми, имеем

$$\rho d\varphi = dz\gamma.$$

Обозначим относительный угол закручивания через

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (13.3)$$

тогда

$$\gamma = \rho\theta.$$

С учетом закона Гука при сдвиге (13.1) получим

$$\tau = \rho\theta G. \quad (13.4)$$

Элементарная сила, действующая на элемент площади поперечного сечения dF , равная τdF , создает момент относительно оси бруса (рис. 13.8)

$$dM_k = \tau dF \rho.$$

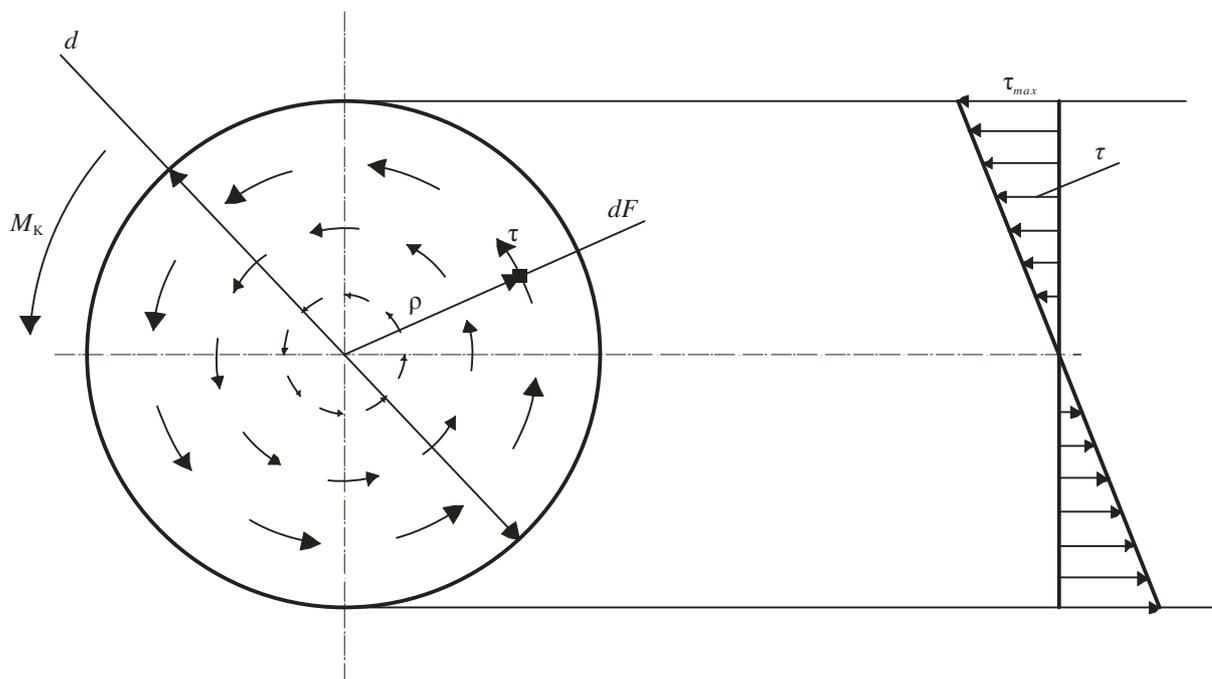


Рис. 13.8

Следовательно, полный крутящий момент M_k равен

$$M_k = \int_F \tau dF \rho.$$

С учетом зависимости (13.4)

$$M_k = \theta G \int_F \rho^2 dF.$$

Величину $J_p = \int_F \rho^2 dF$, зависящую от размеров сечения, называют полярным моментом инерции сечения, тогда

$$M_k = \theta G J_p,$$

откуда

$$\theta = \frac{M_k}{G J_p}. \quad (13.5)$$

По зависимостям (13.4) и (13.5) находим

$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p}.$$

Касательные напряжения линейно распределены по радиусу сечения бруса (рис. 13.8). Максимальное напряжение τ_{max} действует в точках наружного контура при $\rho = \rho_{max}$.

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p}.$$

Отношение $W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$ называется моментом сопротивления при кручении, тогда

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}. \quad (13.6)$$

Подставив (13.3) в (13.5) и произведя интегрирование, найдем угол закручивания бруса

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k l}{GJ_p} dz.$$

Для бруса с постоянными по длине величинами M_k и GJ_p имеем

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}. \quad (13.7)$$

Полученные зависимости используются также и для полых круглых брусьев кольцевого сечения.

Величины J_p и W_p представляют собой геометрические характеристики поперечного сечения. Вычислим их для сплошного и кольцевого круглых сечений.

В кольцевом сечении с внутренним диаметром d и наружным D (рис.13.9) выделим кольцевую площадку радиусом ρ и шириной $d\rho$.

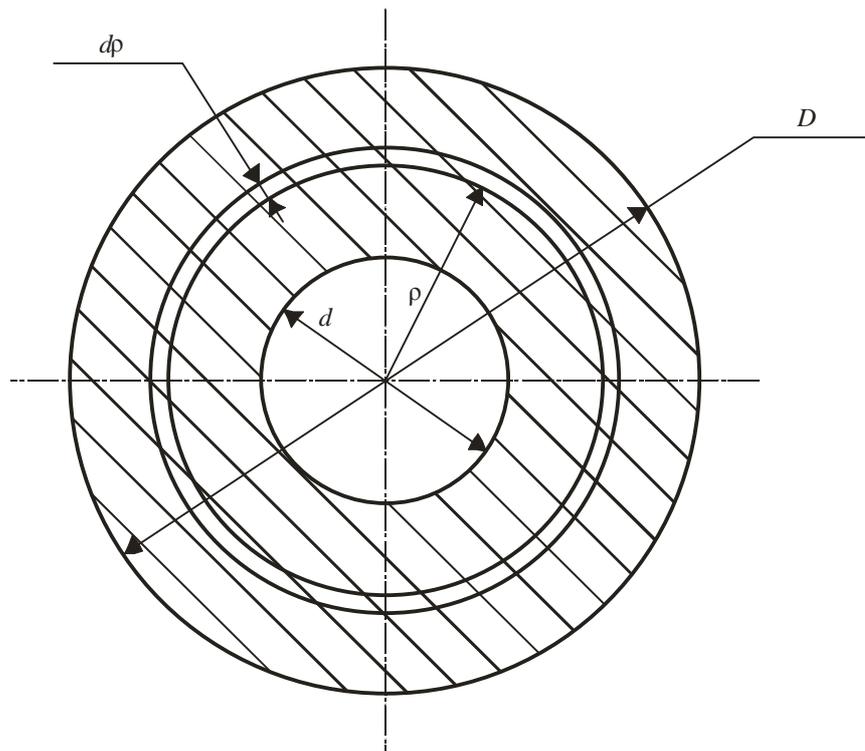


Рис. 13.9

Площадь $dF = 2\pi\rho d\rho$, тогда

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} 2\pi\rho^3 d\rho = \int_{d/2}^{D/2} 2\pi\rho^3 d\rho$$

или

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right];$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right].$$

Для сплошного круглого сечения $d=0$. Следовательно,

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32},$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (13.8)$$

13.3. Кручение брусьев прямоугольного поперечного сечения и тонкостенного профиля

При кручении некруглых брусьев плоскости поперечных сечений искажаются; возникает так называемая депланация (рис. 13.10).

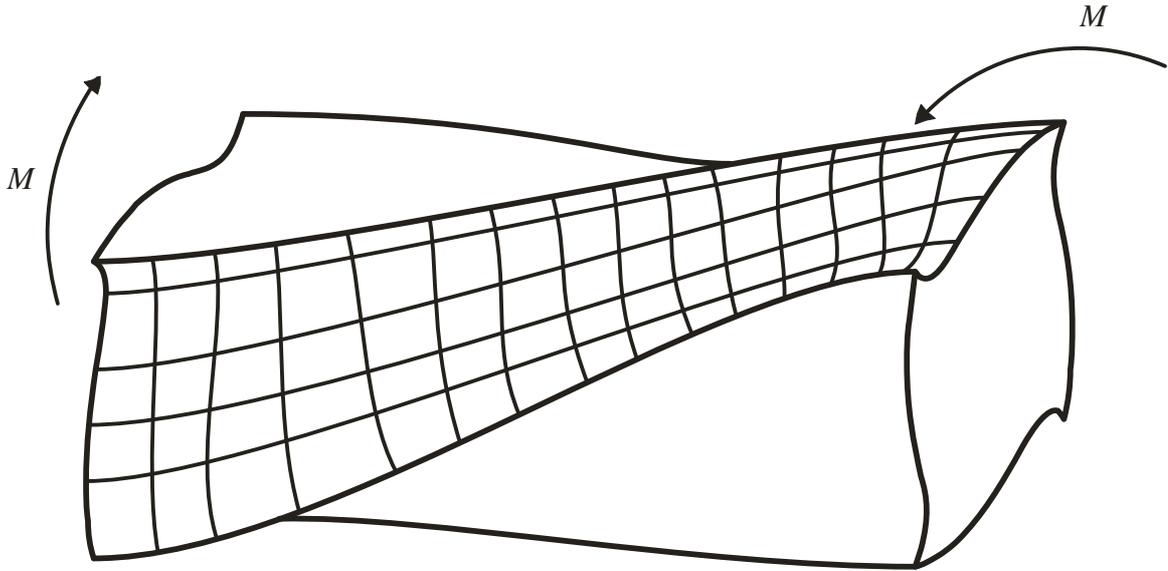


Рис. 13.10

Расчеты, выполненные методами теории упругости, показывают, что касательные напряжения по сечению прямоугольного бруса распределены неравномерно. Максимальные напряжения возникают в точках, находящихся посередине больших сторон прямоугольника (рис.13.11).

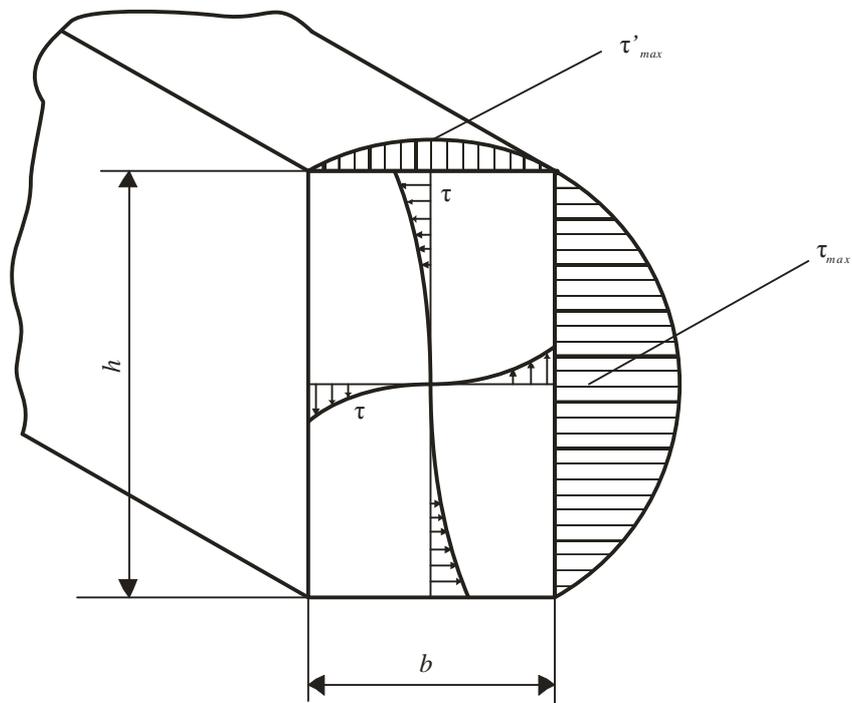


Рис. 13.11

Расчетные формулы для τ_{max} и φ аналогичны формулам (13.6) и (13.7):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}l}{GJ_{кр}}, \quad (13.9)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр}l}{GJ_{кр}}. \quad (13.10)$$

Напряжение, действующее в точках посередине малых сторон прямоугольника τ'_{max} , вычисляется по формуле

$$\tau'_{max} = \alpha_1 \tau_{max}.$$

Момент сопротивления при кручении $W_{кр}$ ($W_{кр} \neq W_p$) и геометрический фактор жесткости $J_{кр}$ ($J_{кр} \neq J_p$) вычисляются по формулам:

$$W_{кр} = \alpha b^2 h;$$

$$J_{кр} = \beta b^3 h,$$

где b и h - малая и большая стороны прямоугольника.

Значения коэффициентов α, β, α_1 в зависимости от отношения h/b приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Коэффициенты	h/b					
	1	2	3	6	10	∞
α	0,208	0,246	0,267	0,299	0,313	1/3
β	0,141	0,229	0,263	0,299	0,313	1/3
α_1	1	0,859	0,753	0,743	0,742	0,742

Для тонкостенных брусьев формулы (13.9) и (13.10) также справедливы, однако величины $W_{кр}$ и $J_{кр}$ вычисляются иначе в зависимости от вида профиля.

Необходимо различать тонкостенные брусья замкнутого профиля (рис. 13.12,а), незамкнутого профиля, который можно развернуть в прямоугольник (рис. 13.12,б), а также незамкнутого профиля, который можно представить в виде совокупности нескольких прямоугольников (рис. 13.12,в).

Для тонкостенного замкнутого профиля с постоянной вдоль контура толщиной стенки δ

$$W_{кр} = 2f\delta; \quad J_{кр} = \frac{4f^2\delta}{s} \quad (13.11)$$

где f - площадь, ограниченная средней линией профиля; S - длина средней линии.

Рис.13.12.

Для тонкостенного незамкнутого профиля (рис. 13.12,б)

$$W_{кр} = \frac{1}{3}\delta^2 S, \quad J_{кр} = \frac{1}{3}\delta^3 S, \quad (13.12)$$

где S - длина развернутого профиля.

Для тонкостенного составного профиля

$$W_{кр} = \frac{J_{кр}}{\delta_{max}}, \quad J_{кр} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \delta_i^3 S_i,$$

где δ_{max} - наибольшая толщина стенки; n - число прямоугольников, из которых составлено сечение; δ_i, S_i - толщина и длина i -го прямоугольника.

13.4. Расчет на прочность и жесткость при кручении

Условие прочности выполняется, если $\tau_{max} \leq [\tau]$, где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение для материала бруса. Величина $[\tau]$ определяется по характеристикам прочности при кручении, получаемым опытным путем (подобно характеристикам прочности при растяжении). Для пластичных материалов определяют предел текучести $\tau_T = 16M_T/\pi d^3$, а для хрупких материалов - предел прочности $\tau_B = 16M_{max}/\pi d^3$ (M_T - момент, при котором в образце материала возникает текучесть; M_{max} - разрушающий момент).

Допускаемые напряжения при кручении для пластичных материалов

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{[n]_T};$$

для хрупких материалов

$$[\tau] = \frac{\tau_B}{[n]_B},$$

где $[n]_T$ - нормативный коэффициент запаса по текучести; $[n]_B$ - нормативный коэффициент запаса по разрушению. Обычно принимают $[n]_T = 2$, $[n]_B = 3 - 4$.

Для обеспечения требуемой жёсткости бруса при кручении необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\theta \leq [\theta].$$

Величина относительного угла закручивания определяется по формуле

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_k}{GJ_p}$$

Допускаемую величину относительного угла закручивания $[\theta]$ назначают, исходя из условия точности работы механизма и отсутствия крутильных колебаний. Для валов передач обычно принимают $[\theta] = 0,25$ град/мм.

13.5 Практические расчеты на срез и кручение

Особенности использования расчетных зависимостей рассмотрим на примерах.

Пример 1. При контроле качества изготовления ИС проверяют прочность паяного соединения вывода 1 с корпусом 2 (рис. 13.5), прикладывая к выводу усилие P . Требуется оценить прочность паяного соединения, если $P=6\text{Н}$, $B=1\text{мм}$, $H=1,5\text{мм}$, допускаемое напряжение на срез припоя $[\tau]_{\text{ср}} = 10$ МПа.

По зависимости (13.2) определяем касательные напряжения в соединении

$$\tau = \frac{P}{BH} = \frac{6}{1 \cdot 1,5} = 4 \text{ МПа.}$$

Поскольку $\tau < [\tau]_{\text{ср}}$, то прочность соединения обеспечена.

Пример 2. Ступенчатый вал, жестко закрепленный по торцам, воспринимает действие крутящего момента M (рис. 13.13). Проверить прочность вала (по наступлению текучести), определить угол поворота сечения, для которого этот угол максимален. В расчетах принять $M = 5 \cdot 10^4 \text{Н} \cdot \text{мм}$, $d = 5\text{мм}$, $l = 40\text{мм}$, материал вала - термообработанная кремнистая сталь $\tau_T = 1000\text{МПа}$, $G = 8 \cdot 10^4\text{МПа}$, $[n]_T = 2$.

Данная задача статически неопределима. Для ее решения, кроме уравнений статики, необходимо использовать условия совместности деформаций.

Брус имеет 3 участка: 1 - AB , 2 - BC , 3 - CD . Используя метод сечений, изложенный в разделе 10, находим внутренние моменты в сечениях 1, 2 и 3 участков.

$$M_{K1} = -M_A, \quad M_{K2} = M - M_A, \quad M_{K3} = M - M_A.$$

Углы закручивания участков вычисляем по формуле (13.7):

$$\varphi_1 = \frac{-M_A l}{GJ_{p1}}, \quad \varphi_2 = \frac{(M - M_A) l}{GJ_{p2}}, \quad \varphi_3 = \frac{(M - M_A) l}{GJ_{p3}}.$$

Условие совместности деформаций участков выражается в том, что суммарный угол закручивания бруса φ_{Σ} равен нулю, (оба торца бруса закреплены)

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Принимая во внимание, что $J_{p1} = J_{p2} = \frac{\pi(2d)^4}{32}$, $J_{p3} = \frac{\pi d^4}{32}$ и подставляя значения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в условие совместимости деформаций, находим

$$M_A = \frac{17}{18}M, \quad M_{K1} = \frac{-17}{18}M, \quad M_{K2} = \frac{1}{18}M, \quad M_{K3} = \frac{1}{18}M.$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях участков определяем по зависимостям (13.6) и (13.8)

$$\tau_{max1} = \frac{M_{K1} \cdot 16}{\pi(2d)^3} = -\frac{34}{18} \frac{M}{\pi d^3};$$

$$\tau_{max2} = \frac{M_{K2} \cdot 16}{\pi(2d)^3} = -\frac{2}{18} \frac{M}{\pi d^3};$$

$$\tau_{max3} = \frac{M_{K3} \cdot 16}{\pi d^3} = -\frac{16}{18} \frac{M}{\pi d^3}.$$

Эпюра τ_{max} изображена на рис. 13.13. Максимальное касательное напряжение τ_{max} действует на участке 1

$$\tau_{max} = \tau_{max1} = \frac{34 \cdot 5 \cdot 10^4}{18 \cdot \pi \cdot 5^3} = 240 \text{ МПа.}$$

Допускаемое напряжение для материала бруса

$$[\tau] = \frac{\tau_T}{[n]_T} = 500 \text{ МПа.}$$

Поскольку $\tau_{max} < [\tau]$, то прочность бруса достаточна.

Углы закручивания участков равны:

$$\varphi_1 = -\frac{17}{18} \frac{Ml32}{G\pi(2d)^4} = -\frac{34}{18} \frac{Ml}{G\pi d^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{18} \frac{Ml32}{G\pi(2d)^4} = \frac{2}{18} \frac{Ml}{G\pi d^4}; \quad \varphi_3 = \frac{1}{18} \frac{Ml32}{G\pi d^4} = \frac{32}{18} \frac{Ml}{G\pi d^4}.$$

Углы поворота сечений

$$\varphi_B = \varphi_1 = -\frac{34Ml}{18G\pi d^4}; \quad \varphi_C = \varphi_B + \varphi_2 = -\frac{32Ml}{18G\pi d^4};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_3 = 0.$$

Эпюра углов поворота сечений представлена на рис. 13.13.

Максимальный угол поворота φ_{max} имеет сечение B :

$$\varphi_{max} = \varphi_B = -\frac{34 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 40}{18 \cdot 8 \cdot 10^4 \pi \cdot 5^4} = -2,4 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Лекция 14. ИЗГИБ

14.1. Геометрические характеристики поперечных сечений

В расчетах брусьев на прочность и жесткость применяют некоторые специальные характеристики поперечных сечений:

1. Статические моменты площади (рис. 14.1)

$$S_x = \int_F y dF, S_y = \int_F x dF. \quad (14.1)$$

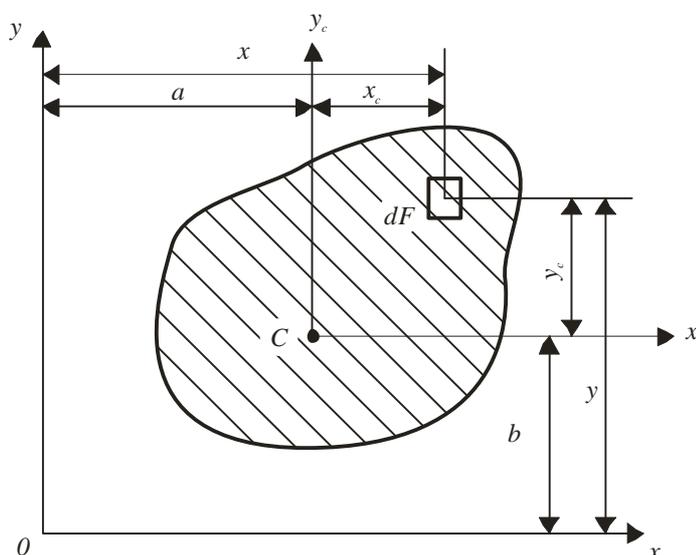


Рис. 14.1

2. Осевые моменты инерции площади

$$J_x = \int_F y^2 dF, J_y = \int_F x^2 dF. \quad (14.2)$$

3. Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

4. Полярный момент инерции

$$S_{\rho} = \int_F \rho dF.$$

Центром тяжести поперечного сечения называют точку (точка C рис. 14.1.), характерную тем, что статический момент площади относительно любой оси, проходящей через эту точку, равен нулю:

$$S_{x_c} = \int_F y_c dF = 0; \quad S_{y_c} = \int_F x_c dF = 0. \quad (14.3.)$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называют центральными осями поперечного сечения.

Вычислим величины статических моментов поперечного сечения (рис. 14.1) относительно производных осей x и y . По формулам (14.1) с учетом (14.3), принимая во внимание, что

$$x = x_c + a, \quad y = y_c + b, \quad (14.4)$$

получим

$$S_x = \int_F (y_c + b) dF = b \int_F dF + \int_F y_c dF = Fb; \quad (14.5)$$

$$S_y = \int_F (x_c + a) dF = a \int_F dF + \int_F x_c dF = Fa.$$

Формулы (14.5) применяют для вычисления координат центра тяжести поперечного сечения.

Полярный момент инерции вычисляют по формуле

$$J_p = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = J_y + J_x,$$

так как $\rho^2 = x^2 + y^2$.

При параллельном переносе осей координат моменты инерции изменяются.

Подставив (14.4) в (14.2), получим

$$J_x = \int_F (y_c + b)^2 dF = \int_F y_c^2 dF + 2b \int_F y_c dF + b^2 \int_F dF.$$

Поскольку $\int_F y_c dF = 0$ в соответствии с (14.3), то

$$J_x = J_{x_c} + b^2 F, \quad J_y = J_{y_c} + a^2 F.$$

Аналогично

$$J_{xy} = J_{x_c y_c} + abF,$$

Где $J_{x_c}; J_{y_c}; J_{x_c y_c}$ - моменты инерции относительно центральных осей.

Доказано, что для любого поперечного сечения существуют две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения. Такие оси называют главными центральными осями сечений.

Геометрические характеристики поперечных сечений, имеющих вид элементарных геометрических фигур,

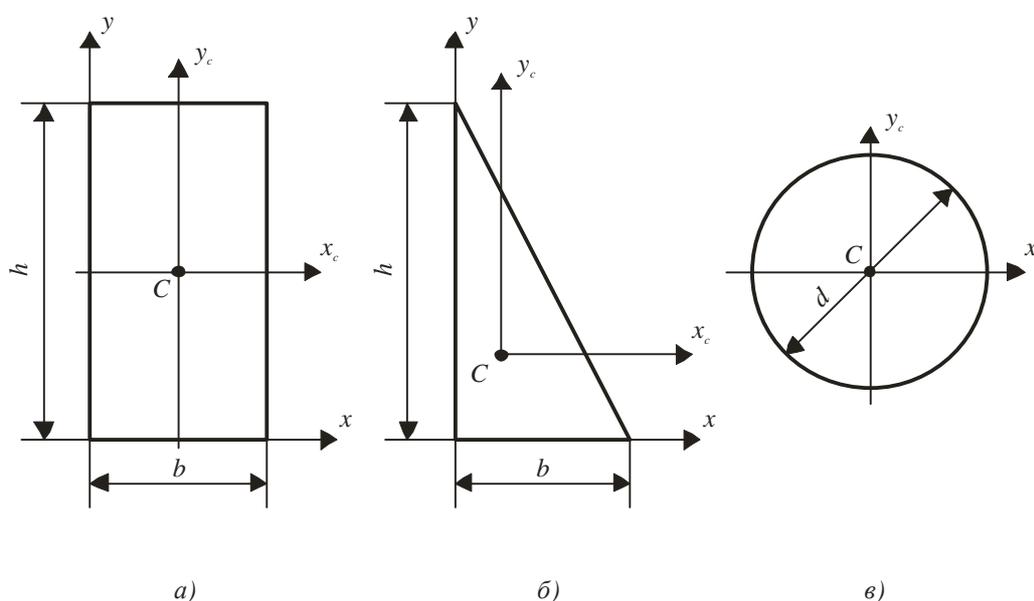


Рис. 14.2

вычисляют по формулам:

для прямоугольника (рис. 14.2, а)

$$S_x = \frac{bh^2}{2}; \quad S_y = \frac{hb^2}{2};$$

$$J_{x_c} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y_c} = \frac{hb^3}{12};$$

$$J_x = \frac{bh^3}{3}; \quad J_y = \frac{hb^3}{3};$$

$$J_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4};$$

для треугольника (рис. 14.2, б)

$$S_x = \frac{bh^2}{6}; S_y = \frac{bh^2}{6};$$

$$J_{x_c} = \frac{bh^3}{36}; J_{y_c} = \frac{hb^3}{36};$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; J_y = \frac{hb^3}{12};$$

$$J_{x_c y_c} = -\frac{b^2 h^2}{72}; J_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24};$$

для круга (рис. 14.2, в)

$$J_p = J_{x_c} + J_{y_c} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64};$$

для полукруга (рис. 14.3)

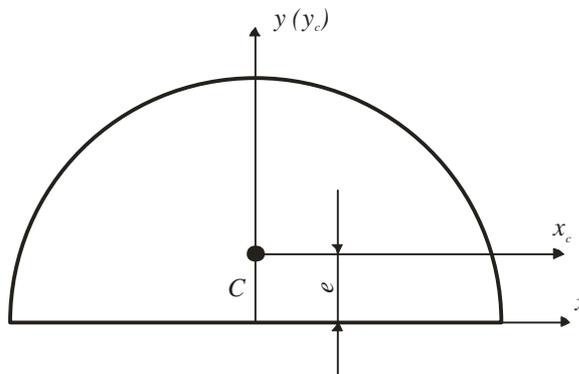


Рис. 14.3

$$J_x = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{128};$$

$$J_{x_c} = J_x - e^2 F;$$

$$\text{где } e = \frac{2d}{3\pi}, \text{ тогда}$$

$$J_{x_c} = \frac{\pi d^4}{128} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi}\right)^2 \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi d^4}{128} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) = \frac{0,28\pi d^4}{128}.$$

14.2. Элементы конструкций, работающие на изгиб. Виды изгиба

Изгиб – это такой вид нагружения бруса при котором происходит искривление его оси. Изгибу подвергаются оси, валики, рычаги и другие детали механизмов; кронштейны, направляющие и прочие элементы несущих конструкций электронных блоков аппаратуры. При разделении полупроводниковых пластин на кристаллы, контактировании иглолок зондовых установок с пластиной на операции контроля, а также при действии инерционных сил на выводы ИС во время механических испытаний возникает изгиб. На рис. 14.4 иллюстрируется один из способов разделения полупроводниковой пластины 2 с нанесенными царапинами на отдельные кристаллы путем изгиба на гибкой опоре 3.

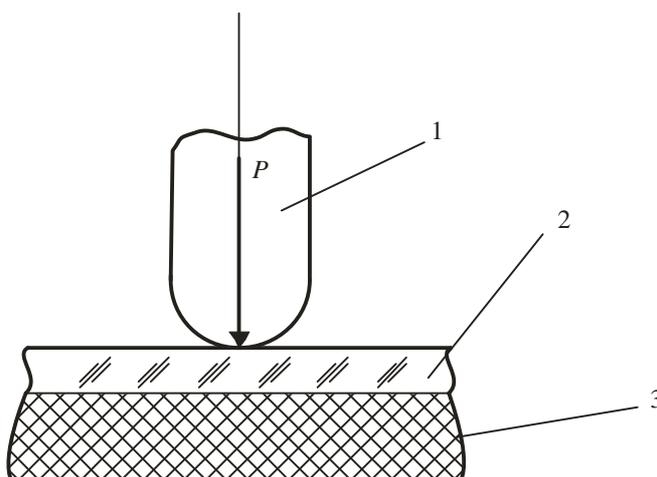


Рис. 14.4

На рис. 14.5 показана схема манипулятора, состоящего из поворотной стойки 1 и рабочего органа (руки) 2. При действии груза P элементы конструкции манипулятора испытывают изгиб.

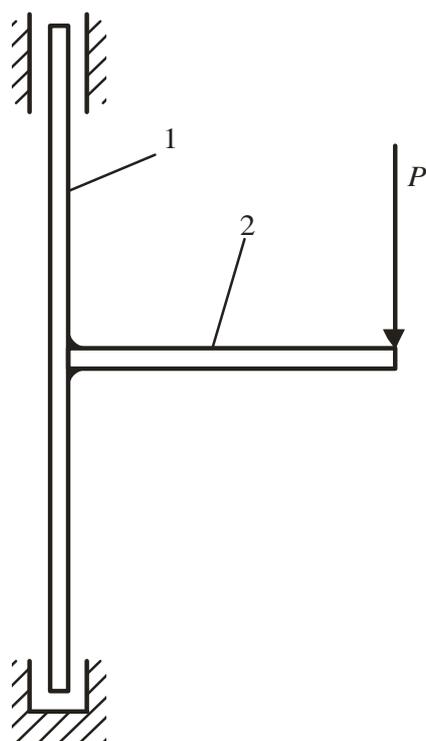


Рис. 14.5

Брус, работающий на изгиб, называют балкой. В зависимости от внутренних силовых факторов в поперечном сечении балки различают следующие виды изгиба: чистый (прямой и косой) и поперечный (прямой и косой).

Чистый изгиб возникает при нагружении балки только парами сил (изгибающими моментами) (рис. 14.6, а,б,в). Чистый изгиб бывает прямой или косой. При прямом изгибе (рис. 14.6, а,б) плоскость действия изгибающего момента совпадает с одной из главных плоскостей балки yoz (рис. 14.6, а) или xoz (рис. 14.6,б). При косом изгибе плоскость действия изгибающего момента расположена под углом к главным плоскостям поперечного сечения балки (рис. 14.6, в).

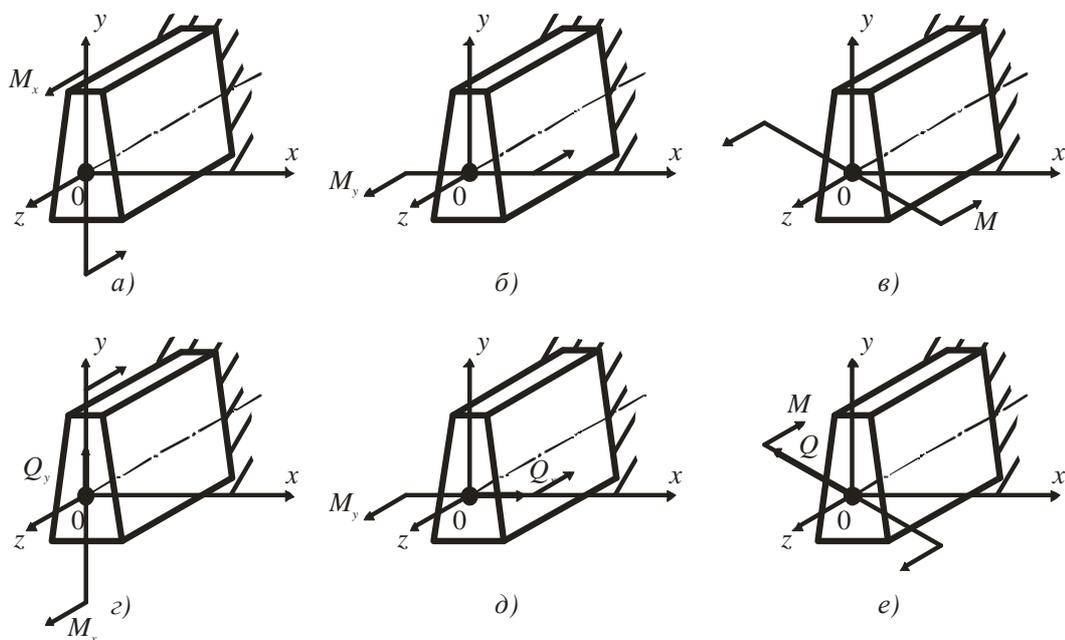


Рис. 14.6

Поперечный изгиб возникает при нагружении балки силами, перпендикулярными ее оси. Поперечный изгиб также подразделяют на прямой (рис. 14.6, г, д) и косой (рис. 14.6,е). При поперечном изгибе в сечениях балки действуют два силовых фактора – поперечная сила Q и изгибающий момент M .

14.3 Напряжения и деформации при чистом прямом изгибе

При чистом прямом изгибе величина внутреннего момента во всех поперечных сечениях балки вдоль оси z одинакова (рис.14.7).

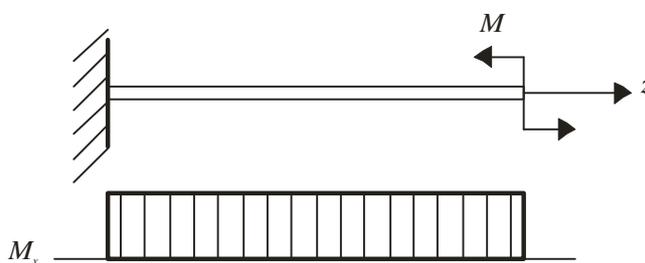


Рис. 14.7

При анализе чистого прямого изгиба предполагают, что поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к деформированной оси, а ось балки

при изгибе имеет форму дуги окружности. При изгибе одна часть волокон балки укорачивается, а другая – удлиняется. Посередине балки имеется слой, который не испытывает ни удлинения, ни укорочения. Этот слой называют нейтральным.

Рассмотрим балку (рис.14.8,а), нагруженную изгибающим моментом (рис. 14.8,б).

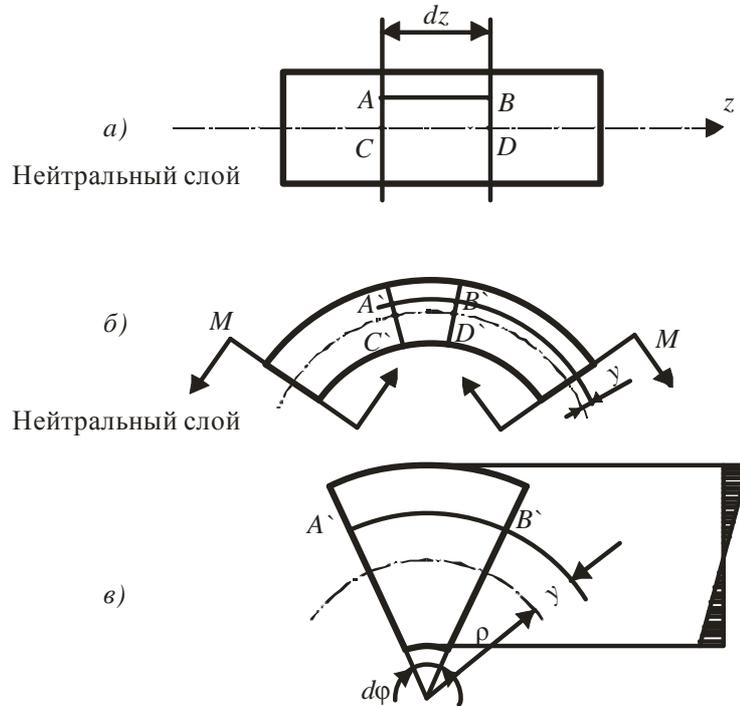


Рис. 14.8

Двумя поперечными сечениями выделим элемент балки dz . До деформирования все волокна этого элемента имели длину $dz=AB$. На рис. 7.8,в этот элемент показан в деформированном виде. Длина волокна CD , принадлежащего нейтральному слою, остается неизменной. Волокно AB , расположенное на расстоянии y от нейтрального слоя, удлинится:

$$\Delta AB = A'B' - AB = A'B' - CD = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi,$$

где ρ - радиус кривизны нейтрального слоя после приложения изгибающего момента. Величину относительной деформации вычисляют по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (14.6)$$

Используя закон Гука для одноосновного напряженного состояния, получим

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E. \quad (14.7)$$

Установим связь между напряжением и изгибающим моментом при чистом прямом изгибе. Рассмотрим равновесие части балки, изображенной на рис. 14.9, ось x расположена в плоскости нейтрального слоя.

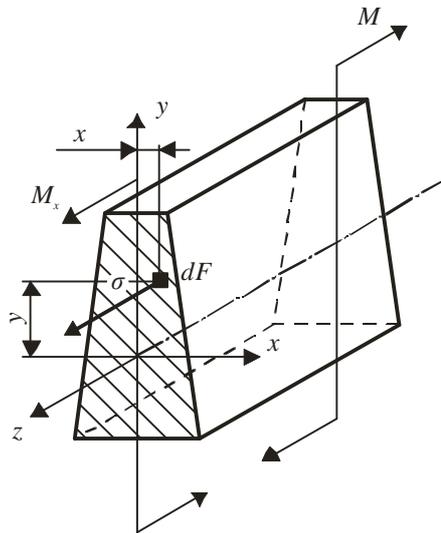


Рис. 14.9

$$\sum Z = 0; \int_F \sigma dF = 0;$$

$$\sum M_y = 0; \int_F \sigma x dF = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \int_F \sigma y dF = M.$$

Используя (14.6), получим

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = \frac{E}{\rho} S_x = 0; \quad (14.8)$$

$$\frac{E}{\rho} \int_F xy dF = \frac{E}{\rho} J_{xy} = 0; \quad (14.9)$$

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_{xy} = M. \quad (14.10)$$

Из уравнений (14.8), (14.9) видно, что $S_x = 0$, $J_{xy} = 0$. Следовательно, нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения, а оси x и y являются главными центральными осями поперечного сечения. Из уравнения (14.10) следует

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x} = \frac{M_x}{EJ_x}, \quad (14.11)$$

так как $M = M_x$.

Подставив (14.11) в (14.7), получим

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y. \quad (14.12)$$

Максимальное по абсолютной величине напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от центра тяжести при $y = y_{max}$,

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max}. \quad (14.13)$$

Величину

$$\frac{J_x}{|y_{max}|} = W_x \quad (14.14)$$

называют моментом сопротивления изгибу поперечного сечения балки.

Из (14.13) с учетом (14.14)

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Геометрические характеристики некоторых поперечных сечений представлены в табл. 14.1.

Таблица 14.1

Поперечное сечение	J_x	y_{max}	W_x
Круг диаметр d	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^3}{32}$

Кольцо наружный диаметр D внутренний диаметр d	$\frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$
Прямоугольник ширина b высота h	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{6}$

Рассмотрим примеры вычисления напряжений при изгибе.

Пример 1. Определить максимальное напряжение σ_{max} , которое возникает при испытании на прочность плоского образца полупроводникового материала (рис 14.10). Нагружение образца проводят по двум вариантам. В первом варианте (рис. 14.10, а) сила P приложена в центре образца, во втором варианте (рис. 14.10, б) две силы $P/2$ приложены на расстоянии $l/3$ от опор каждая. Вычислить значение σ_{max} при $P=3\text{Н}$; $l=5\text{мм}$; $h=0,28\text{мм}$; $b=3\text{мм}$.

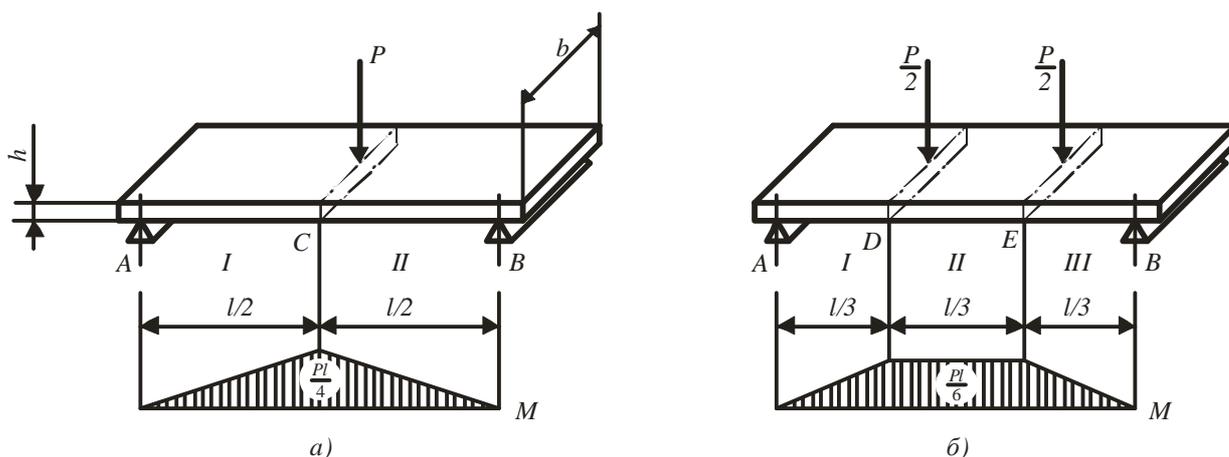


Рис. 14.10

Определяем величину максимального изгибающего момента. Строим эпюры изгибающих моментов для двух вариантов нагружения.

Для первого варианта (рис. 14.10,а) опорные реакции $Y_A + Y_B = P/2$ Уравнения моментов для участков

$$M_{x1} = P \cdot z/2 \text{ при } 0 \leq z \leq l/2;$$

$$M_{x2} = P \cdot z/2 - P(z - l/2) \text{ при } l/2 \leq z \leq l;$$

$$M_{x \max} = Pl/4; \sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{Pl6}{4 \cdot bh^2} = \frac{3 Pl}{2 bh^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 0,28^2} = 95,7 \text{ МПа.}$$

Для второго варианта (рис. 14.10,б) опорные реакции $Y_A + Y_B = P/2$. Уравнения моментов для участков

$$M_{x1} = P \cdot \frac{z}{2} \text{ при } 0 \leq z \leq \frac{l}{3};$$

$$M_{x2} = P \frac{z}{2} - P(z - \frac{l}{3})/2 \text{ при } \frac{l}{3} \leq z \leq \frac{2l}{3};$$

$$M_{x3} = P \frac{z}{2} - P(z - \frac{l}{3})/2 - P(z - \frac{2l}{3})/2 \text{ при } \frac{2l}{3} \leq z \leq l;$$

$$M_{x \max} = M_{x2} = \frac{Pl}{6}; \quad \sigma_{\max} = \frac{Pl}{6} = \frac{6}{bh^2} = \frac{Pl}{bh^2} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 0,28^2} = 63,8 \text{ МПа.}$$

Из решения видно что при одной и той же силе нагружения в образцах возникают различные максимальные напряжения. Вторая схема нагружения при испытаниях является более предпочтительной, так как в центральной части образца действуют одинаковые изгибающие моменты (M_{x2}), что позволяет получать более стабильные значения разрушающих напряжений.

Пример 2. Определить максимальные напряжения в элементах манипулятора (рис. 14.11), состоящего из "руки" 1, жестко соединенной со стойкой 2, и основания 3.

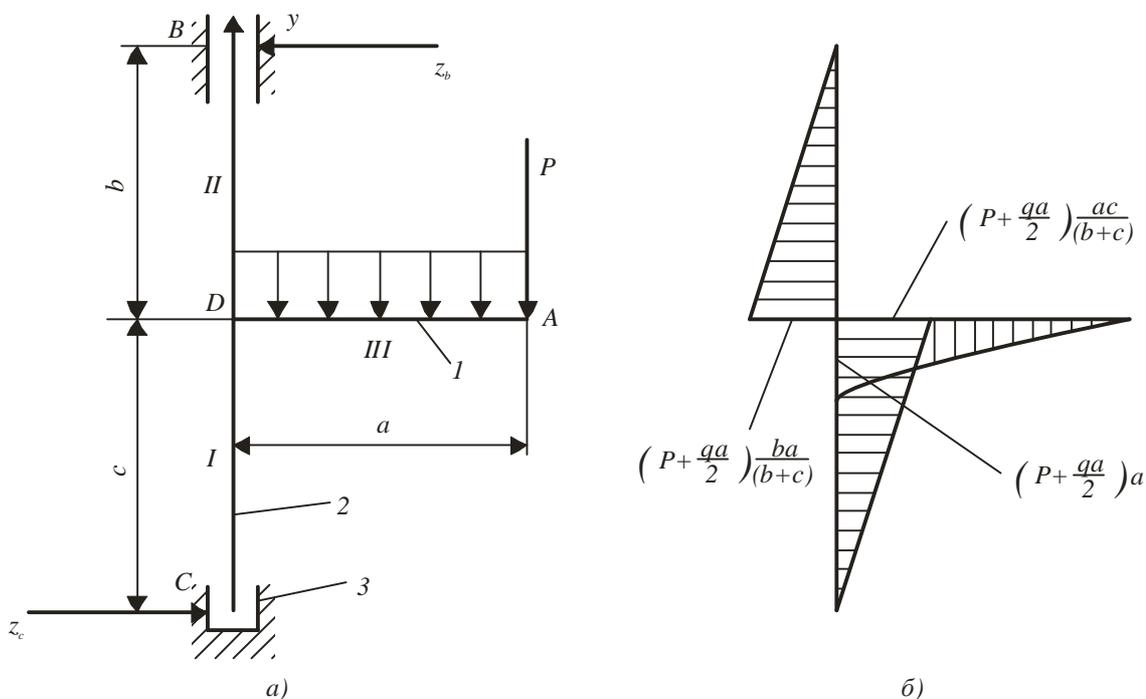


Рис. 14.11

В точке A действует сосредоточенная сила веса $P = 50$ Н транспортируемой детали. Вес "руки" равномерно распределен по всей длине с интенсивностью $q = 6 \cdot 10^{-2}$ Н/см. "Рука" 1 изготовлена из Т - образного стандартного профиля, имеющего момент сопротивления изгибу $W = 1,163$ см³. Стойка 2 изготовлена из трубы внешним диаметром 40 мм и внутренним 30 мм. Линейные размеры: $a=300$ мм, $b=100$ мм, $c=300$ мм.

Силы реакций z_B и z_C находим из условий равновесия

$$\sum M_B = 0 \text{ и } \sum M_C = 0:$$

$$\sum M_B = -Pa - \frac{qa^2}{2} + z_C(b+c) = 0, \quad z_C = \left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{a}{(b+c)};$$

$$\sum M_C = -Pa - \frac{qa^2}{2} + z_B(b+c) = 0, \quad z_B = \left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{a}{(b+c)}.$$

Изгибающий момент для участка 1 $0 \leq y \leq c$:

$$M_x = z_C y;$$

$$M_{1\max} = z_C c = \left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{ac}{(b+c)}.$$

Изгибающий момент для участка 2 $b \leq y \leq (b+c)$:

$$M_x = z_C y - \left(Pa - \frac{qa^2}{2}\right); \quad M_{2\max} = \left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{ab}{(b+c)}.$$

Изгибающий момент для участка 3:

$$M_x = -Pz - \frac{qz^2}{2}; \quad M_{3\max} = -Pa - \frac{qa^2}{2}.$$

Максимальное напряжение для участков 1 и 2

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{1\max}}{W_x} = \frac{\left(P + \frac{qa}{2}\right) \frac{ac}{(b+c)}}{\frac{\pi d_2^3}{64} \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4}\right)} = \frac{\left(50 + \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 30}{2}\right) \frac{30 \cdot 30}{(30+10)}}{\frac{\pi \cdot 4^3}{64} \left(1 - \frac{3^4}{4^4}\right)} = 7,82 \text{ МПа.}$$

Максимальное напряжение для участка 3

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{3\max}}{W_x} = \frac{Pa + \frac{qa^2}{2}}{W_x} = \frac{\left(50 + \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 30}{2}\right) 30}{1,163} = 13,13 \text{ МПа.}$$

При поперечном изгибе в поперечном сечении балки возникает изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y . Изгибающий момент вызывает нормальные напряжения, а поперечная сила - касательные напряжения. Касательные напряжения при расчете сплошных стержней не учитываются.

14.4. Расчет на прочность при изгибе

Условие прочности при изгибе балки из пластичного материала имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (14.15)$$

Предел прочности хрупких материалов на растяжение и сжатие неодинаков. Поэтому при расчетах на прочность балки из хрупкого материала необходимо, чтобы удовлетворялось условие прочности для растянутых и сжатых волокон отдельно

$$\sigma_{p\ max} = \frac{M_x}{J_x} |y_{max}|_p \leq [\sigma]_p \quad (14.16)$$

$$\sigma_{сж\ max} = \frac{M_x}{J_x} |y_{max}|_{сж} \leq [\sigma]_{сж}.$$

Для сечений, имеющих ось симметрии, перпендикулярную плоскости действия изгибающего момента, достаточно выполнение первого уравнения из (14.16), так как $[\sigma]_{сж} \geq [\sigma]_p$:

Допускаемые напряжения при изгибе определяют либо по результатам испытаний материалов на растяжение по формулам (12.1) и (12.3), либо по результатам испытаний материалов на изгиб. В последнем случае допускаемое напряжение обозначают $[\sigma]_и$ и вычисляют по формуле

$$[\sigma]_и = \frac{\sigma_{Bи}}{n},$$

где $\sigma_{Bи}$ - предельное напряжение, полученное по результатам испытаний на изгиб; n - коэффициент запаса.

14.5. Понятие о рациональной форме поперечных сечений при изгибе

При растяжении бруса нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения равны. Любая форма поперечного сечения с точки зрения прочности рациональна.

В случае изгиба центральные части сечения балки нагружены меньше, чем периферийные (14.12). Рациональными являются сечения, ослабленные в центральной части. Поясним это положение на примере.

Пример 3. Определить размеры и площадь поперечного сечения балки, нагруженной изгибающим моментом $M = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Материал балки дуралюминий, допускаемое напряжение на изгиб $[\sigma]_{\text{и}} = 120 \text{ МПа}$. Расчеты выполнить для сечений заданной формы (рис. 14.12).

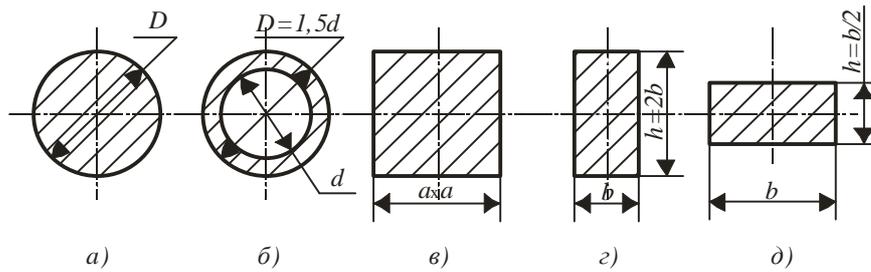


Рис. 14.12

Из условия прочности (14.5)

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]_{\text{и}}}$$

Для сплошного круглого сечения (рис. 14.12,а)

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}; D \geq \sqrt[3]{\frac{M_x \cdot 32}{[\sigma]_{\text{и}} \pi}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 32}{120 \cdot \pi}} = 7,5 \text{ мм}; F = 44,2 \text{ мм}^2.$$

Для кольцевого сечения (рис. 14.12,б)

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right); D \geq \sqrt[3]{\frac{M_x \cdot 32}{[\sigma]_{\text{и}} \pi \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 32}{120 \pi \left(1 - \frac{1}{1,5^4}\right)}} = 8,1 \text{ мм}; F = 28,6 \text{ мм}^2.$$

Для квадратного сечения (рис. 14.12,в)

$$W_x = \frac{a^3}{6}; a \geq \sqrt[3]{\frac{M_x \cdot 6}{[\sigma]_{\text{и}}}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 6}{120}} = 6,3 \text{ мм}; F = 39,6 \text{ мм}^2.$$

Для прямоугольного сечения (рис. 14.12,г)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3}; b \geq \sqrt[3]{\frac{M_x \cdot 3}{[\sigma]_{\text{и}} \cdot 2}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 32}{120 \cdot 2}} = 4,0 \text{ мм}; F = 32 \text{ мм}^2.$$

Для прямоугольного сечения (рис. 14.12,д)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3}{24}; b \geq \sqrt[3]{\frac{M_x \cdot 24}{[\sigma]_и}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 24}{120}} = 10 \text{ мм}; F = 50 \text{ мм}^2.$$

Полученные результаты наглядно показывают, что форма сечения балки существенно влияет на ее прочностные свойства.

14.6. Расчет на жесткость при изгибе

Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Жесткость балки определяется величинами δ и φ (рис, 14.13), где δ - перемещение произвольного сечения по направлению, перпендикулярному оси балки, φ - угол поворота сечения.

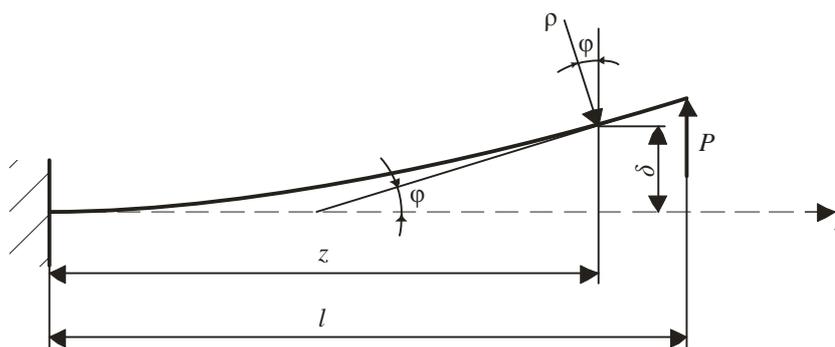


Рис. 14.13

Рассмотрим деформацию балки, изображенной на рис. 14.14. Из курса математики известно

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2\delta}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\delta}{dz}\right)^2\right]^{3/2}},$$

где z - координата балки.

Так как рассматриваются малые величины прогибов и углов поворота, то

$\delta' = \varphi$, $\varphi \ll 1$, тогда

$$\frac{1}{\rho} = \delta'' \tag{14.17}$$

Подставив (14.17) в (14.11), получим дифференциальное уравнение упругой линии балки при изгибе

$$\delta'' = \frac{d^2\delta}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (14.18)$$

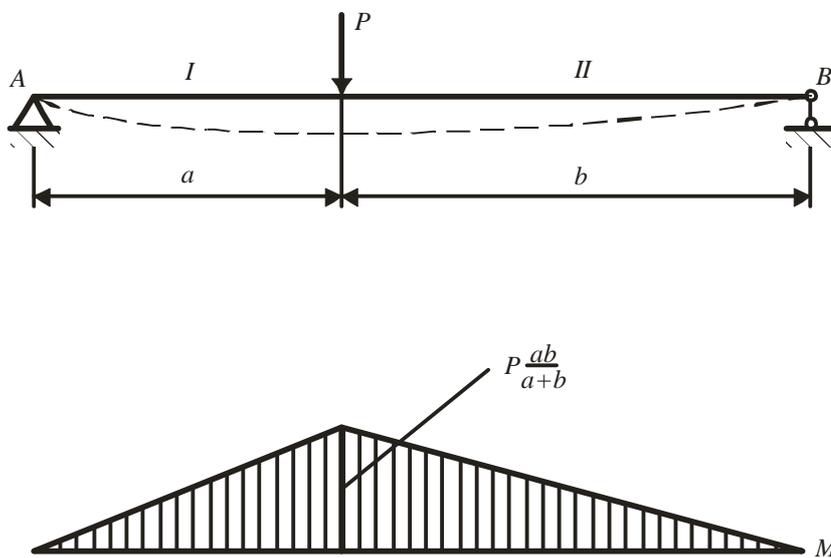


Рис. 14.14

Определим уравнение упругой линии консольной балки (рис. 14.13).

Изгибающий момент в сечении с координатой z : $M_x = P(l - z)$.

Подставим его значение в (14.8) и проинтегрируем дважды:

$$\delta' = C_1 + \frac{P}{EJ_x} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right); \quad (14.19)$$

$$\delta = C_2 + C_1 z + \frac{P}{EJ_x} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right). \quad (14.20)$$

Из граничных условий $z = 0$; $\delta = 0$; $\delta' = \varphi = 0$; C_1 и $C_2 = 0$.

Уравнение упругой линии балки имеет вид

$$\delta = \frac{P}{EJ_x} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right).$$

Подставив $z = l$ в (14.19) и (14.20), получим

$$\delta'_{max} = \varphi_{max} = \frac{Pl^2}{2EJ_x}; \quad \delta_{max} = \frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

Определим уравнение упругой линии и уравнение углов поворота для двух-опорной балки (рис, 14.14).

Силы реакций в опорах:

$$Y_A = P \frac{b}{(a+b)}; \quad Y_B = P \frac{b}{(a+b)}.$$

Для участка балки $0 \leq z \leq a$

$$M_x = P \frac{b}{(a+b)} z; \quad \delta_1'' = \frac{1}{EJ_x} \frac{Pb}{(a+b)} z.$$

Интегрируя последнее выражение, получаем

$$\delta_1' = \frac{1}{EJ_x} \frac{Pb}{2(a+b)} z^2 + C_1; \quad (14.21)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{EJ_x} \frac{Pb}{6(a+b)} z^3 + C_1 z + C_2. \quad (14.22)$$

Для участка $a \leq z \leq l$

$$M_x = \frac{Pb}{(a+b)} z - P(z-a); \quad \delta'' = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{Pb}{(a+b)} z - P(z-a) \right];$$

$$\delta_2' = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{Pb}{2(b+a)} z^2 - P \frac{(z-a)^2}{2} + C_1' \right]; \quad (14.23)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{Pb}{6(b+a)} z^3 - P \frac{(z-a)^3}{6} + C_1' z + C_2' \right]. \quad (14.24)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_1' и C_2' находим из граничных условий. Из условия непрерывности и гладкости упругой линии в точках сопряжения участков балки 1 и 2, при $z = a$ $\delta_1' = \delta_2'$, откуда из (14.21) и (14.23) имеем $C_1 = C_1'$; а для $\delta_1 = \delta_2$ из (14.22) и (14.24) получаем $C_2 = C_2'$. Из условия закрепления балки находим при $z = 0$ $\delta_1 = 0$ из (14.22) $C_2 = 0$; при $z = (b+a)$, $\delta_2 = 0$ из (14.24)

$$C_1' = \frac{-Pab(2a+b)}{6(a+b)}.$$

Величина прогиба в точке приложения силы из (14.22)

$$\delta_1' = \frac{Pa^2 b^2}{3(a+b)EJ_x}.$$

Универсальный метод Мора определения перемещений при изгибе

Энергия деформации при изгибе. Потенциальная энергия деформации балки при изгибе равна работе моментов на угловом перемещении. Для участка балки длиной dz (рис.14.8)

$$dU = \frac{1}{2} M_x \varphi,$$

где dU - дифференциал энергии деформации. Множитель $1/2$ введен в связи с тем что момент и угол поворота связаны линейной зависимостью (14.19).

Поскольку

$$\varphi = \frac{dz}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}, \text{ то } dU = \frac{M_x^2 dz}{2EJ_x}.$$

Энергия деформации всей балки

$$dU = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2 dz}{EJ_x}. \quad (14.25)$$

Выражение (14.25) используют для вычисления перемещений.

Интеграл Мора. Рассмотрим балку, нагруженную силой P (рис. 14.15,а)

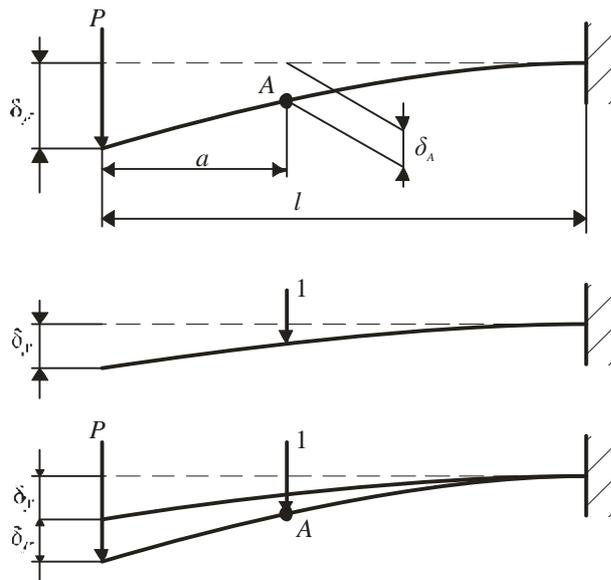


Рис. 14.15

Определим перемещение в точке $A(\delta_A)$. Энергия деформации балки определяется по формуле

$$U_{P''} = \int_l \frac{M_{P''}^2 dz}{2EJ_x}$$

Приложим к балке единичную силу "1" в точке A (рис. 14.15,б).

Энергия деформации вычисляется по формуле

$$U_{1''} = \int_l \frac{M_{1''}^2 dz}{2EJ_x},$$

где $M_{1''}$ – момент от единичной силы.

Приложим к балке единичную силу "1", а затем силу P (рис. 14.15,в). В соответствии с принципом независимости действия сил полное перемещение $\delta = \delta_{1''} + \delta_{P''}$. После приложения силы P единичная сила совершает работу на перемещении $\delta_{P''}$ $U_{1''} = 1\delta_{P''}$.

Полная работа сил в состоянии "1+P" равна

$$U_{1+P''} = \int_l \frac{(M_{P''} + M_{1''})^2 dz}{2EJ_x} = \int_l \frac{M_{P''}^2 dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{M_{1''}^2 dz}{2EJ_x} + \int_l \frac{M_{P''}M_{1''} dz}{EJ_x}.$$

В полученном выражении первый интеграл представляет собой энергию деформации балки под действием силы P , второй – энергию деформации балки под действием единичной нагрузки, а третий интеграл равен работе единичной силы на перемещении, происходящим под действием силы P

$$1 \cdot \delta_{P''} = \delta_{P''} = \int_l \frac{M_{P''}M_{1''}}{EJ_x} dz. \quad (14.26)$$

Выражение (14.26) носит название интеграла Мора. Его применяют для вычисления перемещений в отдельных точках балки при изгибе. Интеграл Мора используется также для вычисления углов поворота сечений. В этом случае в рассматриваемой точке прикладывают единичный момент

$$1 \cdot \varphi_{P''} = \varphi_{P''} = \int_l \frac{M_{P''}M_{1''}}{EJ_x} dz.$$

Пример 4. Определить перемещение точки A балки, изображенной на рис. 14.15, и угол поворота сечения в точке A под действием силы P .

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_{P''} M_{1''}}{EJ_x} dz,$$

где $M_{P''} = Pz$; $M_{1''} = \mathbf{1}(z - a)$, тогда

$$\delta_A = \int_0^l \frac{Pz \cdot \mathbf{1}(z - a)}{EJ_x} dz, \text{ при } a = 0 \quad \delta_A = \frac{Pl^3}{3EJ_x};$$

$$\varphi_A = \int_0^l \frac{M_{P''} M_{1''}}{EJ_x} dz,$$

где $M_{P''} = Pz$, $M_{1''} = \mathbf{1}$;

$$\varphi_A = \int_0^l \frac{Pz \cdot \mathbf{1}}{EJ_x} dz, \text{ при } a = 0 \quad \varphi_A = \frac{Pl^2}{2EJ_x}.$$

Для балок, состоящих из нескольких участков, интеграл Мора записывают в виде

$$\delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{P''} \cdot M_{1''}}{EJ_x} dz,$$

где n – число участков; l_i – длина отдельного участка; $M_{P''}, M_{1''}$ – моменты на отдельном участке.

Графоаналитический способ Верещагина

Для балок с прямолинейной осью, имеющих постоянное поперечное сечение, интеграл Мора удобно вычислять графоаналитическим способом Верещагина. Так как эпюра от единичной нагрузки в пределах каждого участка является линейной (рис. 14.16),

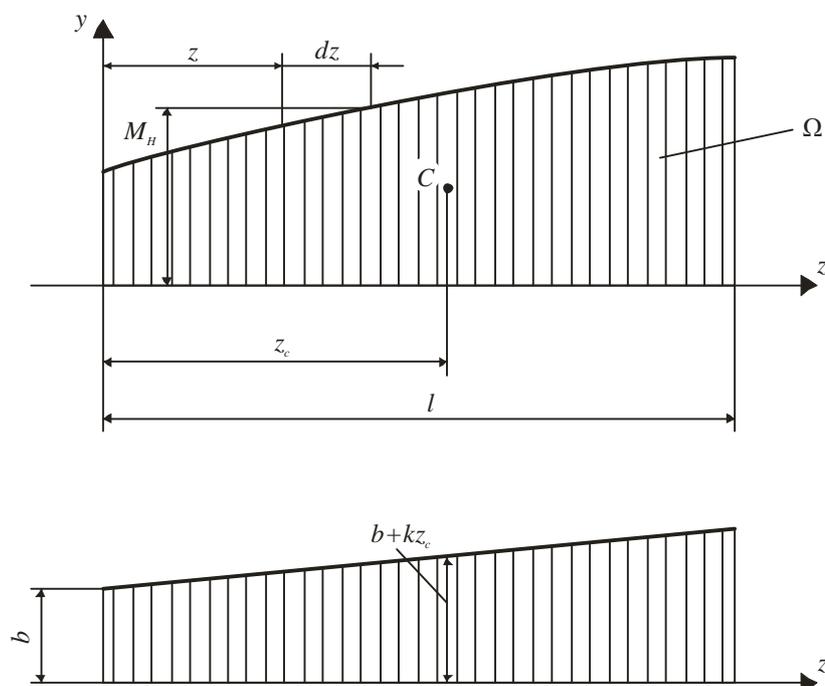


Рис. 14.16

то

$$M_{1''} = b + kz.$$

Подставив это выражение в формулу (14.26), получим

$$\delta = \int_l \frac{M_{1''}(b + kz)}{EJ_x} dz = \left[k \int_l M_{1''} z dz + b \int_l M_{1''} dz \right] \frac{1}{EJ_x}.$$

Интеграл во втором слагаемом представляет собой площадь Ω от заданной нагрузки, а интеграл в первом слагаемом – статический момент этой площади относительно оси y (рис.14.16).

Согласно (14.1) $S_y = \Omega z_c$, где z_c – расстояние от начала координат до центра тяжести площади.

Выражение для вычисления перемещения принимает вид

$$\delta = \frac{1}{EJ_x} (b\Omega + k\Omega z_c) = \frac{1}{EJ_x} (b + kz_c)\Omega.$$

Пример 5. Вычислить прогиб и угол поворота точки А балки, изображенной на рис.14.17.

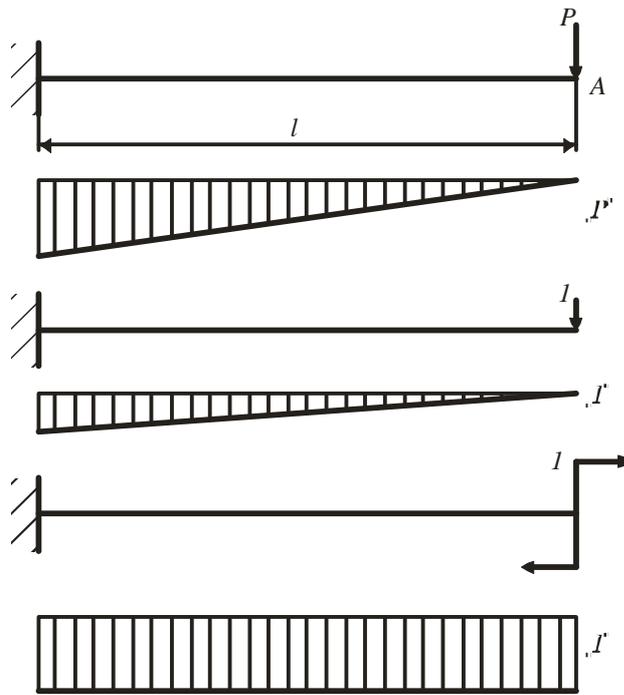


Рис. 14.17

$$\delta_A = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{2}{3} l \right] = \frac{Pl^3}{3EJ_x};$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} Pl \right) 1 \right] = \frac{Pl^2}{2EJ_x}.$$

Применяя способ Верещагина, следует учитывать знаки моментов. Если в результате вычисления получено отрицательное значение δ_A или φ_A , то это означает, что направление перемещения (или угол поворота) рассматриваемой точки противоположно направлению единичной нагрузки.

14.7. Статически неопределимые системы

К статически неопределимым системам, работающим на изгиб, относятся многоопорные балки и рамы. В микроэлектронике расчетные схемы статически неопределимых балок применяют при расчетах соединительных проводников и выводов приборов. Общий метод расчета статически неопределимых систем состоит в следующем. Снимают лишние связи, заменяя их воздействие на систему реактивными силами. Определяют перемещения в направлении отброшенных связей и приравнивают их к нулю. В результате получают уравнения перемещений, число

которых равно числу лишних связей. Используя уравнения перемещений, находят реактивные силы в лишних связях (рис. 14.18,в).

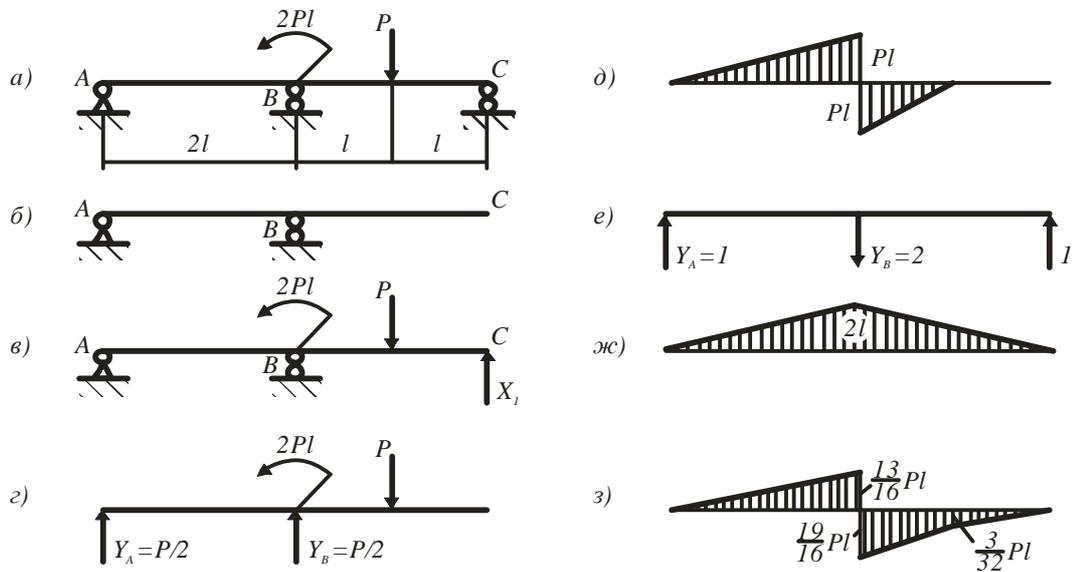


Рис. 14.18

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 14.18,а. Степень статической неопределенности данной балки равна единице, так как для преобразования данной системы в статически определимую надо снять одну связь. Устранив опору C получим статически определимую балку (рис. 14.18, б).

Перемещение точки C согласно принципу независимости действия сил можно представить в виде суммы перемещений от заданной нагрузки и от реактивной силы

$$\delta_C = \delta_{1P} + \delta_{1X_1} = 0$$

Перемещение точки C от реактивной силы можно представить в виде произведения перемещения от единичной нагрузки на величину этой силы $\delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1$, тогда

$$\delta_{1P} + \delta_{11}X_1 = 0. \quad (14.27)$$

Уравнение (14.27) называют каноническим уравнением метода сил. Найдем коэффициенты уравнения (14.27), используя эпюры моментов от заданных сил (M_P на рис. 14.18,д) и от единичной силы (M_1 на рис. 14.18 ж)

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \right) \frac{2}{3} \cdot 2l \right] = \frac{16}{3} \frac{l^3}{EJ_x};$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot Pl \cdot 2l \right) \frac{2}{3} \cdot 2l - \left(\frac{1}{2} Pl \right) \frac{5}{3} l \right] = \frac{Pl^3}{EJ_x}.$$

Подставив найденные коэффициенты в каноническое уравнение (14/27), получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{32}P.$$

Силы реакций определяют суммированием сил реакций, найденных для схем рис.14.18,г и рис. 14.18,е, предварительно умножив силы реакций от единичной силы на величину X_1 . Эпюру Изгибающих моментов для статически неопределимой балки (рис. 14.18,а) получают суммированием эпюры (рис. 14.18,д) и эпюры (рис. 14.18,ж), предварительно умноженной на X_1 . Суммарная эпюра моментов представлена на рис. 14.18,з.

Пример 6. Корпус микроосхемы весом $G = 4 \cdot 10^{-2}$ Н (рис. 14.19,а) прикреплен к плате о помощью десяти планарных выводов. Длина каждого вывода $l=4$ мм, поперечное сечение $b \cdot h = 0,8 \times 0,2$ мм. Определить напряжения в выводах, возникающие при движении платы вниз с ускорением $a = 150g$.

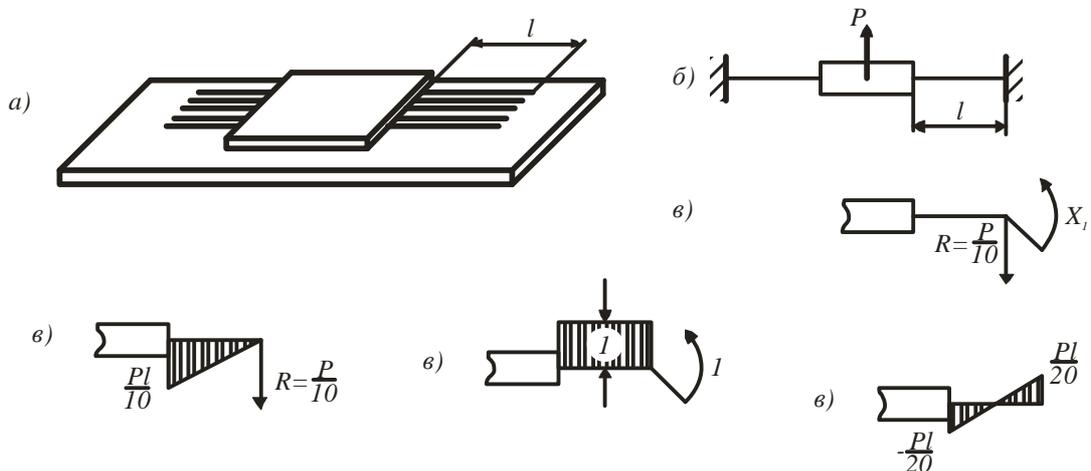


Рис. 14.19

Данная задача относится к типу так называемых квазистатических, т.е. таких, которые можно рассматривать как статические, если к реально действующим си-

лам добавить фиктивные силы инерции, определяемые по принципу Даламбера. Сила инерции равна произведению массы на ускорение и направлена в сторону, обратную ускорению.

Считая массу самих выводов пренебрежимо малой и прилагая к корпусу силу инерции, равную $P = \frac{Ga}{g} = 150G = 6 \text{ Н}$, получим расчетную схему, показанную на рис. 14.19,б.

Для получения эквивалентной статически определимой системы отбросим одну заделку (правую) и приложим вместо нее силу R и момент X_1 (рис. 14.19,в). В этом случае горизонтальной реакции не будет, так как при малых перемещениях длина выводов практически не меняется. Величину силы R , одинаковую для всех выводов, находят из условия равновесия $\sum Y = 0; P - 10R = 0; R = 0,1P$. Степень статической неопределимости балки в схеме 14.19,б равна единице. Каноническое уравнение перемещений имеет вид

$$\sigma_{1P} + \sigma_{11}X_1 = 0.$$

Уравнение означает, что угловое перемещение равно нулю. Для определения коэффициентов уравнения применим правило Верещагина. Построим эпюры моментов от силы R и от единичного момента, соответствующего моменту X_1 (рис.14.19,г,д).

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} l \frac{Pl}{10} \right) (-1) = -\frac{Pl^2}{20EJ_x};$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} (1 \cdot l) \cdot 1 = \frac{l}{EJ_x};$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{1}{20} Pl.$$

Суммарная эпюра моментов от силы R и момента X_1 показана на рис. 14.19, е.

Максимальный момент возникает в сечении у заделки

$$M_{max} = \frac{Pl}{20} = \frac{150 \cdot Gl}{20} = 1,2 \text{ Н} \cdot \text{мм};$$

момент сопротивления изгибу (см. табл. 7.1)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,8 \cdot 0,2^2}{6} = 5,33 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^3;$$

максимальное напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = 225 \text{ МПа.}$$

Лекция 15. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В разделах 11, 13, 14 показано, что расчет на прочность при простых видах нагружения основан на сравнении максимального расчетного напряжения с допускаемым предельным напряжением, определяемым экспериментально. Такой подход возможен в том случае, когда напряженное состояние в рассчитываемой детали подобно имеющемуся при экспериментах. Расчетное напряжение при растяжении, например, сравнивается с предельным или с допускаемым напряжением, определенным по результатам испытаний образцов на растяжение.

Экспериментальные данные о прочности материала в случае сложного нагружения при предельном состоянии, подобном данному, в литературе отсутствуют.

Для установления условий эквивалентности различных напряженных состояний с точки зрения их прочности, а также для расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии на основании результатов испытаний, полученных при простейших напряженных состояниях, разработана теория предельных состояний. Ниже излагаются основные сведения из этой теории, а также вспомогательные сведения о напряженном и деформированном состоянии материала.

15.1. Напряженное состояние. Главные напряжения и главные площадки

Между частицами нагруженного тела (рис. 15.1) действуют внутренние силы. Интенсивность этих сил называется напряжениями.

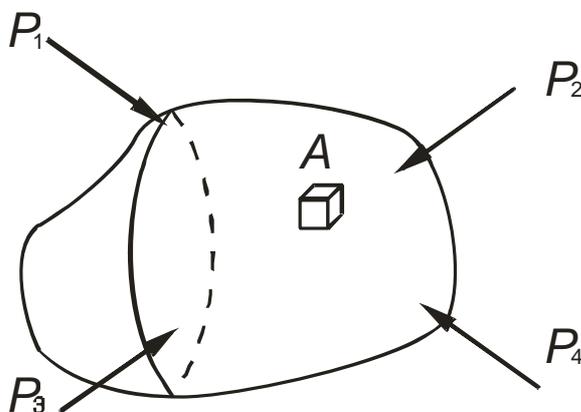


Рис.15.1

Полные векторы напряжений P_x, P_y, P_z , действующих по граням бесконечно

малого параллелепипеда, мысленно выделенного в окрестности точки A (рис. 15.2,а), характеризуют интенсивность взаимодействия данной частицы тела с соседними.

Нормальные и касательные составляющие векторов P_x, P_y, P_z по координатным осям: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, изображены на рис. 15.2,б.

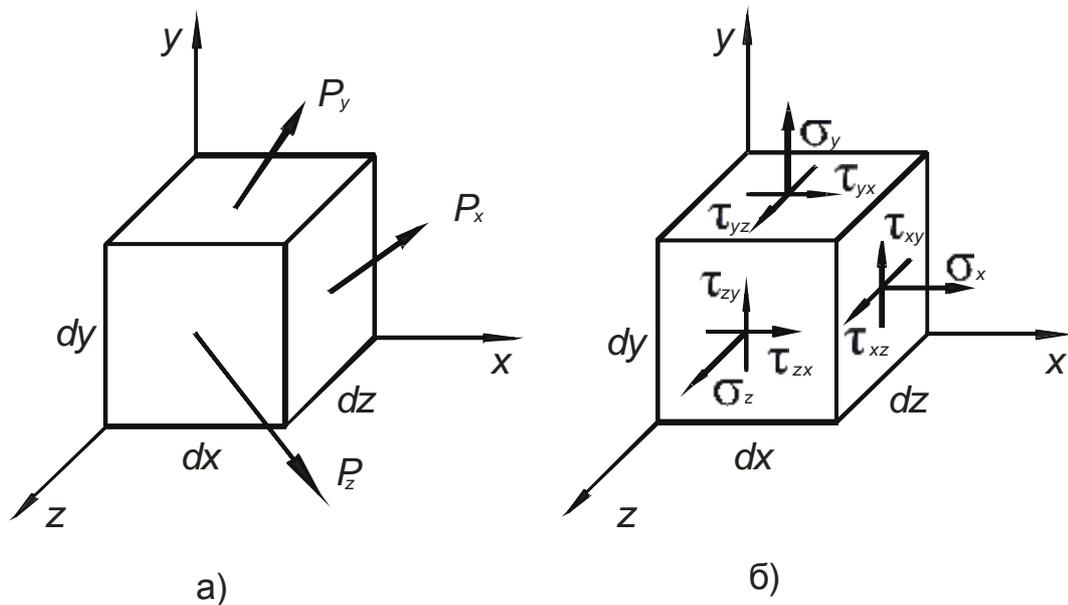


Рис.15.2

Согласно закону парности касательные напряжения попарно равны

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Следовательно, число независимых напряжений, действующих по граням выделенного элемента, равно шести:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}.$$

Эти величины принято называть компонентами напряженного состояния в точке.

При изменении ориентации координатных площадок компоненты напряженного состояния изменяются. Можно показать, что при любом напряженном состоянии всегда можно найти три взаимно перпендикулярные площадки, в которых будут действовать только нормальные напряжения (рис. 15.3).

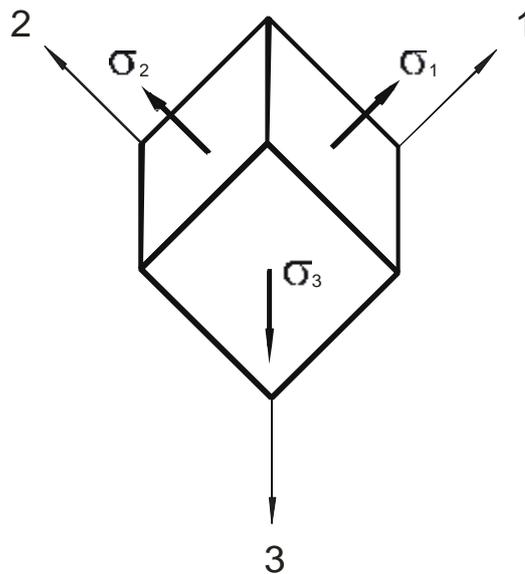


Рис.15.3

Эти напряжения называют главными нормальными напряжениями или просто главными напряжениями, а площадки, в которых они действуют - главными площадками. В порядке убывания главные напряжения обозначают

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \text{ т.е. } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Величины главных напряжений можно определить по компонентам напряженного состояния с помощью следующего уравнения:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (15.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= s_x + s_y + s_z ; \\ I_2 &= s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - t_{xy}^2 - t_{yz}^2 - t_{zx}^2 ; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} s_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & s_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & s_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Уравнение (15.1) всегда имеет три вещественных корня, которые равны соответственно трем главным напряжениям. Величины I_1, I_2, I_3 называют инвариантами напряженного состояния, поскольку они не зависят от ориентации исходных координатных площадок.

Различают напряженные состояния: одноосное, двухосное (плоское) и трехос-

ное (объемное).

При одноосном напряженном состоянии два главных напряжения равны нулю, например $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Такое напряженное состояние возникает, в частности, при растяжении и чистом изгибе.

При двухосном напряженном состоянии одно из главных напряжений равно нулю. Двухосное или плоское состояние возникает при кручении, совместном действии изгиба и кручения брусьев, нагружении тонкостенных оболочек и пластин.

Трехосное напряженное состояние $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ возникает, в частности, при нагружении внешним давлением.

Для произвольного двухосного напряженного состояния (рис.15.4)

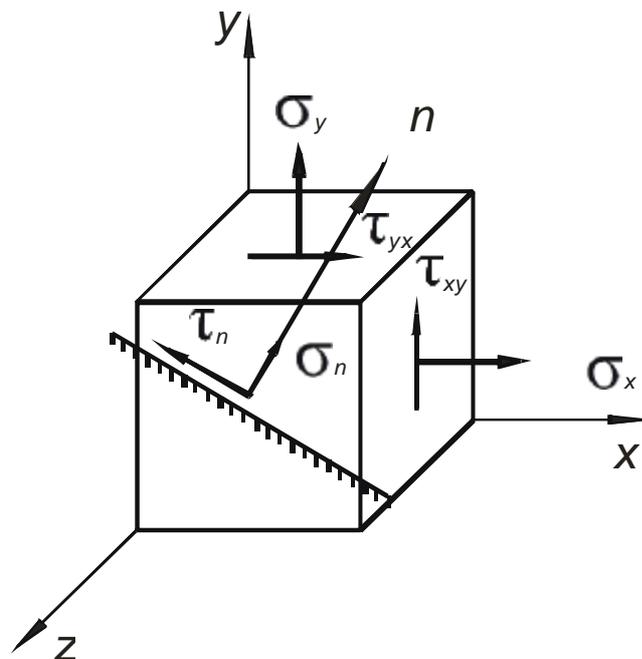


Рис. 15.4

два неизвестных главных напряжения находят из уравнения

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2, \quad (15.2)$$

где σ_n и τ_n - напряжения в произвольной площадке с нормалью n . При $\tau_n = 0$ из уравнения (15.2) получаем выражение для вычисления главных напряжений

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} . \quad (15.3)$$

Уравнение (15.2) представляет собой уравнение окружности в координатах τ_n, σ_n с центром в точке C , с координатами $\tau_{nC} = 0, \sigma_{nC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ (рис.15.5).

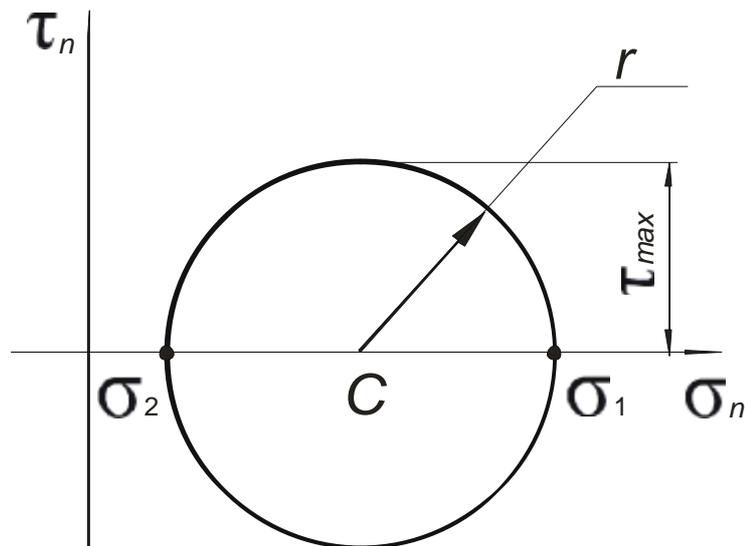


Рис. 15.5

Радиус окружности r равен

$$r = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} .$$

Окружность, построенная по уравнению (15.2), носит название круговой диаграммы Мора. Точки пересечения ее с осью σ_n определяют главные напряжения σ_1 и σ_2 . Диаграмма удобна для анализа напряженного состояния и определения максимальных касательных напряжений τ_{max} .

Последовательно изображая диаграммы Мора для каждой пары главных напряжений, получают диаграмму Мора для трехосного напряженного состояния (рис. 15.6).

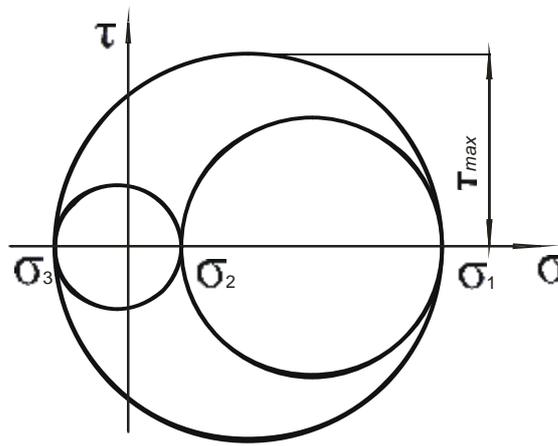


Рис.15.6

Соответствующее данному напряженному состоянию максимальное касательное напряжение τ_{max} может быть вычислено по формуле

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \quad (15.4)$$

15.2. Деформированное состояние. Удельная потенциальная энергия деформации материала

Под действием внешних сил, действующих на тело, возникают линейные деформации в направлении координатных осей $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ и угловые деформации сдвига в координатных плоскостях $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Величины $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ являются компонентами деформированного состояния. В пределах пропорциональности компоненты деформированного состояния связаны с компонентами напряженного состояния формулами обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] ; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] ; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] ; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} . \end{aligned} \right\} .$$

Кубический элемент, по граням которого действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 15.2), деформируется в параллелепипед. Линейные деформации осей

1, 2 и 3 равны

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Линейная деформация ε_1 имеет максимальную величину из всех линейных деформаций по всем осям, проходящим через рассматриваемую точку.

При деформации в материале накапливается потенциальная энергия U . Энергия, накапливаемая в единице объема, называется удельной потенциальной энергией деформации U_0 . Полная энергия равна интегралу от удельной энергии по объему тела V :

$$U = \int_V U_0 dV.$$

При одноосном растяжении U вычисляется по формуле (11.5).

В общем случае напряженного состояния выражение для удельной потенциальной энергии деформации имеет вид

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)].$$

Деформация тела сопровождается изменением как его формы, так и его объема. Соответственно энергию деформации U_0 представляют в виде суммы двух частей - энергии деформации изменения формы $U_{0\phi}$ и энергии деформации изменения объема $U_{0об}$:

$$U_0 = U_{0\phi} + U_{0об}.$$

Величины $U_{0\phi}$ и $U_{0об}$ можно вычислить по главным напряжениям, пользуясь следующими формулами:

$$U_{0\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \quad (15.6)$$

$$U_{0об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

15.3. Гипотезы прочности. Расчет на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Гипотезы прочности предназначены для проведения расчетов на прочность при сложном напряженном состоянии с использованием характеристик прочности, полученных при испытаниях на растяжение и сжатие.

При описании гипотез прочности используются следующие понятия. Предельное состояние - состояние, при котором наступает текучесть материала или происходит разрушение. Эквивалентные напряженные состояния - такие состояния, при пропорциональном увеличении компонент которых одновременно достигаются предельные состояния. Эквивалентное напряжение - напряжение при одноосном растяжении, эквивалентном сложному напряженному состоянию.

Гипотезы прочности устанавливают условия эквивалентности различных напряженных состояний и служат основой для вывода формул эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{эkv}}$.

Гипотеза максимальных нормальных напряжений. Предполагается, что эквивалентное напряжение равно максимальному главному напряжению $\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1$. Гипотеза применяется для хрупких материалов, если главное напряжение σ_1 существенно больше, чем σ_2 и σ_3 .

Гипотеза максимальных линейных деформаций. Напряженные состояния считаются эквивалентными, если максимальные линейные деформации у них одинаковы.

Поскольку максимальная линейная деформация для эквивалентного растяжения равна $\frac{s_{\text{эkv}}}{E}$, а для сложного напряженного состояния определяется по формуле (15.5), то условие эквивалентности имеет вид

$$\frac{1}{E} [s_1 - m(s_2 + s_3)] = \frac{s_{\text{эkv}}}{E}$$

или

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3).$$

Гипотеза дает результаты, которые удовлетворительно согласуются с опытом для хрупких материалов при частичных случаях напряженного состояния. На практике эта гипотеза применяется редко.

Гипотеза максимальных касательных напряжений. Эквивалентными считаются напряженные состояния, у которых одинаковы максимальные касательные напряжения. Поскольку для одноосного напряженного состояния $\tau_{max} = \frac{\sigma_{\text{эКВ}}}{2}$, а для сложного напряженного состояния согласно (15.4) $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, то

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (15.7)$$

Гипотеза применяется для пластичных материалов при условии, что $\sigma_1 \geq 0$ и $\sigma_3 \leq 0$. По этой гипотезе устанавливаются условия эквивалентности напряженных состояний по наступлению текучести. Возможность хрупкого разрушения по этой гипотезе не учитывается.

Гипотеза энергии изменения формы. Согласно этой гипотезе напряженные состояния эквивалентны, если величины удельных потенциальных энергий деформации изменения формы одинаковы. Для одноосного растяжения согласно (15.6) при $\sigma_1 = \sigma_{\text{эКВ}}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$U_{0\text{ф}} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\text{эКВ}}^2.$$

Приравнявая это выражение выражению (15.6), имеем

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (15.8)$$

Эквивалентное напряжение, вычисленное по этой гипотезе, хорошо согласуется с опытными данными по наступлению текучести у пластичных материалов при любых значениях главных напряжений. Для хрупких материалов эта гипотеза неприменима.

Гипотеза предельных состояний. Гипотеза основана на общих представлениях об эквивалентных напряженных состояниях, которые даны в начале параграфа. Эквивалентное напряжение по этой гипотезе вычисляют по формуле

$$s_{\text{эКВ}} = s_1 - k s_3, \quad (15.9)$$

где k - коэффициент, равный отношению предельного напряжения при растяжении к предельному напряжению при сжатию:

$$k = \frac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{тс}}} - \text{для пластичных материалов};$$

$$k = \frac{S_{\text{вр}}}{S_{\text{вс}}} - \text{для хрупких материалов}.$$

Величины $\sigma_{\text{экв}}$ вычисленные по (15.9), удовлетворительно согласуются с опытными данными, как для пластичных, так и для хрупких материалов при $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_3 \leq 0$.

Расчет на прочность при совместном действии изгиба и кручения. В случае совместного действия изгиба и кручения (рис.15.7,а)

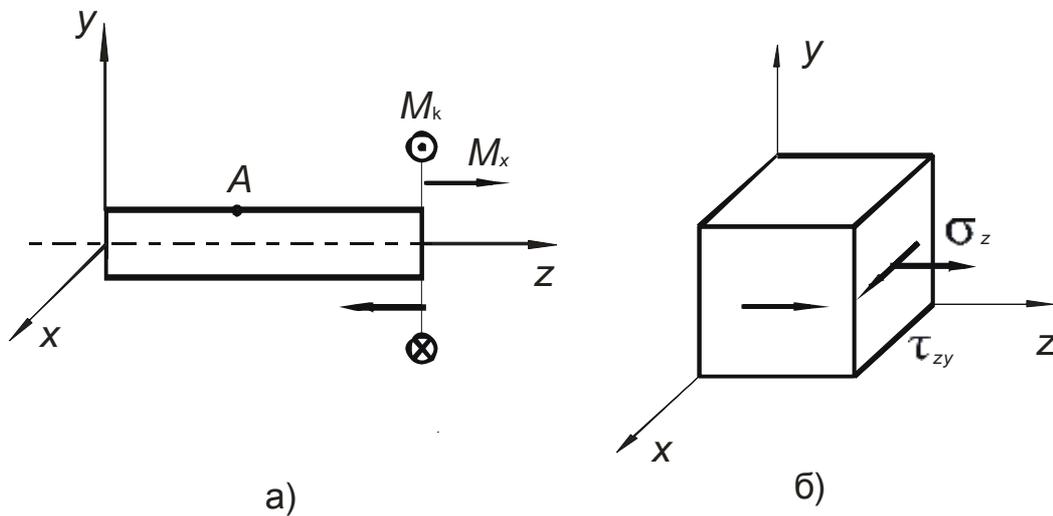


Рис.15.7

в точках у поверхности бруса (точка А) возникает двухосное напряженное состояние с компонентами σ_z и τ_{zx} (рис.15.7,б):

$$s_z = s = \frac{M_x}{W_x}, \quad t_{zx} = t = \frac{M_k}{W_p}$$

Одно из главных напряжений у поверхности равно нулю; два остальных вычисляются по зависимости (15.3)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Величины главных напряжений имеют значения

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Используя расчетные зависимости гипотез прочности (15.7) - (15.9), получают выражения эквивалентного напряжения, в которые непосредственно входят величины σ и τ .

По гипотезе максимальных касательных напряжений

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (15.10)$$

По гипотезе энергии изменения формы

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (15.11)$$

По гипотезе предельных состояний

$$s_{\text{экв}} = \frac{1-k}{2}s + \frac{1+k}{2}\sqrt{s^2 + 4t^2}. \quad (15.12)$$

Формулы (15.10) - (15.12) удобны тем, что при практических расчетах не требуют предварительного вычисления главных напряжений.

Лекция 16. расчет оболочек и пластин

16.1 Особенности оболочек

Корпуса некоторых микросхем, корпусные элементы технологического и испытательного оборудования, подвергающиеся действию избыточного давления, рассчитывают по схеме оболочек.

Оболочка представляет собой тело, ограниченное двумя близко расположенными поверхностями. Толщина оболочки h (рис. 16.1,а) значительно меньше высоты H и радиуса r .

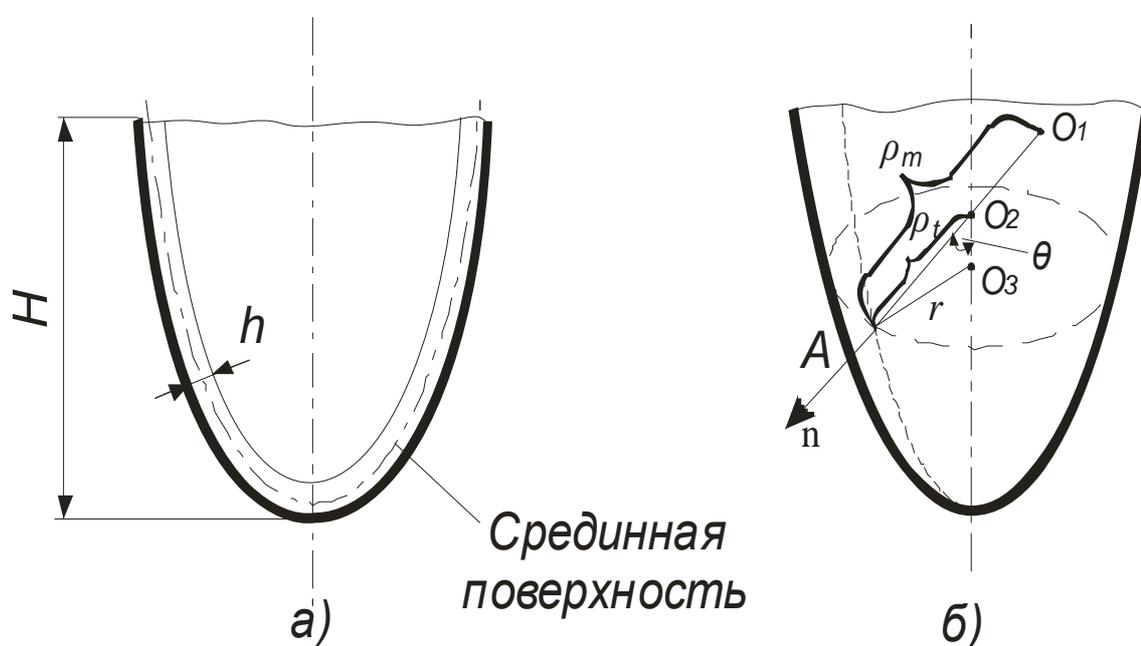


Рис.16.1

Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, называют срединной поверхностью. Если срединная поверхность является плоскостью, то такую оболочку называют пластиной.

Рассмотрим осесимметричную оболочку, изображенную на рис. 16.1,а. Срединная поверхность оболочки показана на рис.16.1, б.

Радиус экваториального сечения $r_m = AO_2$ и радиус меридианального сечения $r_m = AO_1$ являются радиусами главных кривизн в произвольной точке срединной

поверхности оболочки (точка A). Угол между нормалью и осью оболочки θ , радиус оболочки r и радиусы r_m и r_t являются основными геометрическими параметрами оболочки в произвольной точке A .

16.2. Расчет напряжений в осесимметричных оболочках по безмоментной теории

Расчет на прочность оболочек вращения проводится наиболее просто в том случае, когда напряжения в оболочке постоянны по толщине и, следовательно, изгиб отсутствует. Теория расчета оболочек, построенная на таком предположении, называется безмоментной.

Рассмотрим оболочку, нагруженную внутренним давлением p (рис.16.2).

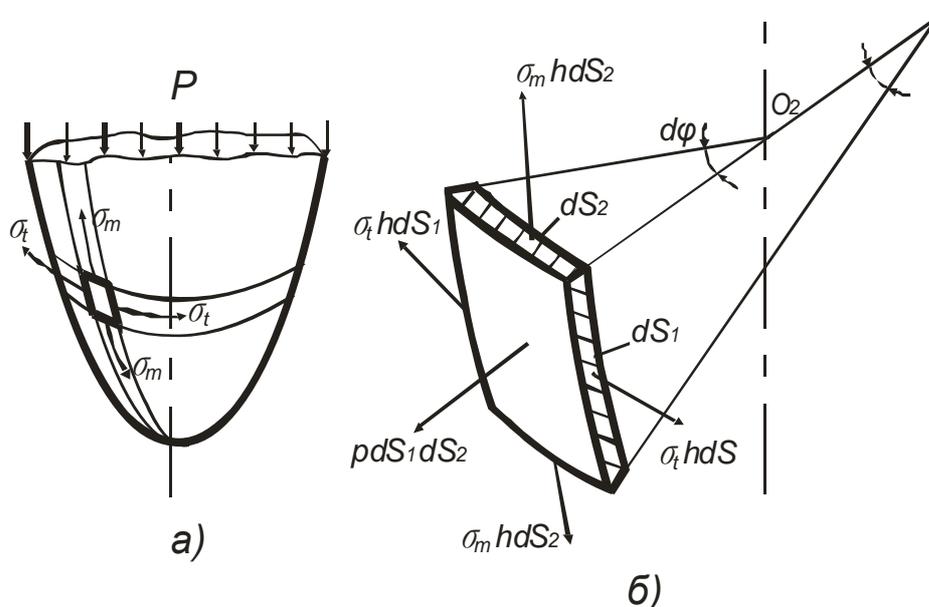


Рис.16.2

Двумя меридианальными и двумя экваториальными сечениями выделим элемент оболочки с размерами граней dS_1 и dS_2 (рис 16.2, б).

На боковые грани выделенного элемента действуют нормальные напряжения: меридиональное s_m и экваториальное s_t . По нормали к поверхности выделенного элемента действует давление p (рис.16.2, б). Предположим, что напряжения s_m и s_t не меняются по толщине оболочки. Радиусы r_m и r_t и r монотонно ме-

няются по длине оболочки. Давление p постоянно или слабо меняется по длине оболочки.

Составим сумму проекций всех сил на нормаль к выделенному элементу

$$r \cdot dS_1 \cdot dS_2 - s_m \cdot dS_2 \cdot h \cdot dq - s_t \cdot dS_1 \cdot h \cdot dj = 0. \quad (16.1)$$

Длины дуг dS_1 и dS_2 вследствие малости углов равны

$$dS_1 = r_m \cdot dq, \quad dS_2 = r_t \cdot dj. \quad (16.2)$$

Разделив (16.1) на $dS_1 \cdot dS_2 \cdot h$ с учетом (16.2), получим зависимость

$$\frac{s_m}{r_m} + \frac{s_t}{r_t} = \frac{r}{h}. \quad (16.3)$$

Полученное соотношение носит название уравнения Лапласа, оно справедливо

для соотношения $h \leq \frac{1}{20} \cdot r$.

Для части оболочки, показанной на рис.16.3,

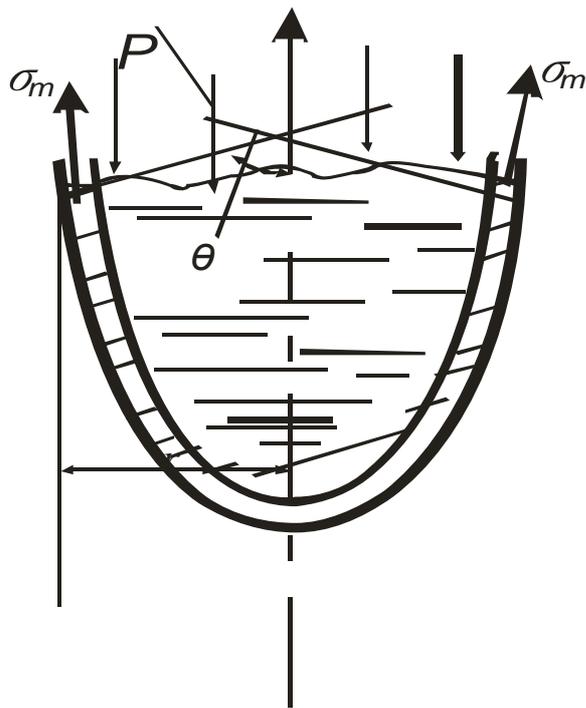


Рис.16.3

составим еще одно уравнение равновесия, проектируя все силы на ось оболочки z получим $\sum Z_i = 0$:

$$-s_m \cdot 2 \cdot p \cdot r \cdot h \cdot \sin q - \Phi = 0 \quad (16.4)$$

где Φ - равнодействующая всех внешних сил.

Для оболочки, заполненной жидкостью и нагруженной давлением p , равнодействующая всех действующих сил принимает вид

$$\Phi = p \cdot p \cdot r^2 + g_m \cdot V + G,$$

где g_m и V - удельный вес и объем жидкости; G - вес выделенного элемента оболочки.

Из уравнения (16.4) вычислим напряжение

$$s_m = \frac{\Phi}{2 \cdot p \cdot r \cdot h \cdot \sin q}. \quad (16.5)$$

Уравнения (16.3) и (16.5) представляют собой замкнутую систему уравнений для вычисления напряжений s_m и s_t .

Пример I. Рассмотрим тонкостенную вакуумную камеру (рис.16.4,а) состоящую из цилиндрической оболочки 1 и сферического кольца 2.

В рабочем состоянии камера нагружена внешним давлением $P_H = 0,1$ МПа.

Камера изготовлена из нержавеющей стали 1Х18Н10Т, имеющей предел текучести $s_T = 200$ МПа. Размеры камера $D=800$ мм, $h = 4$ мм.

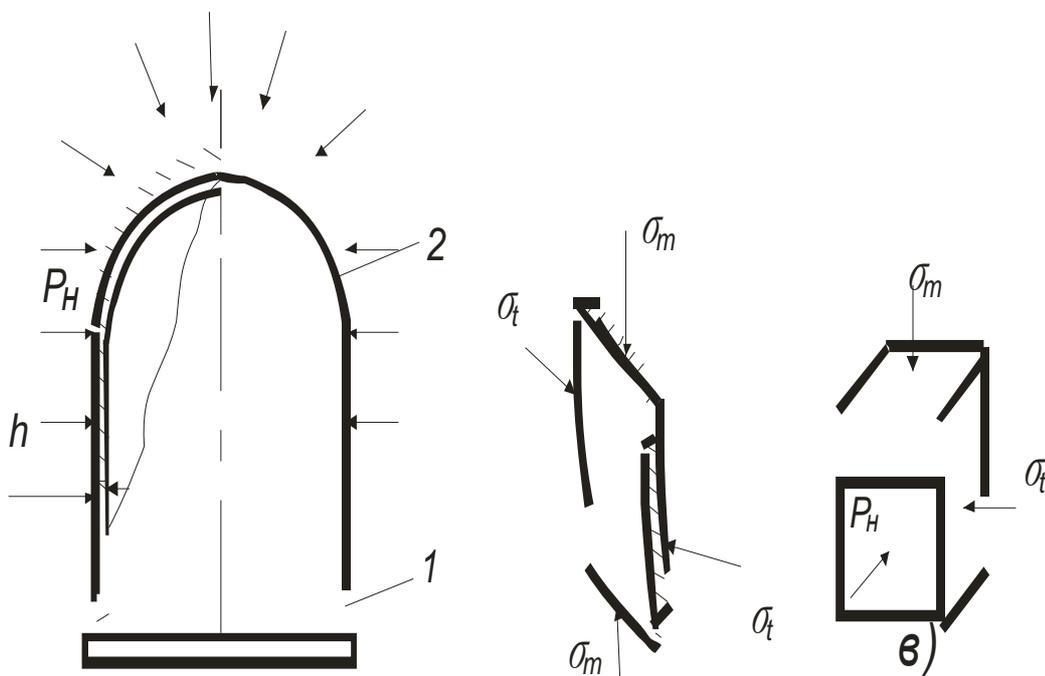


Рис. 16.4

Вычислим напряжение для цилиндрической части. Так как для цилиндра

$r_m = 0, r_t = \frac{D}{2}$, то из формул (16.3) и (16.5) следует

$$s_t = -\frac{P_H \cdot D}{2 \cdot h}; \quad s_t = -\frac{P_H \cdot D}{4 \cdot h} \quad (16.6)$$

Напряженное состояние в точках цилиндрической части камеры (рис. 16.4,б) будет в общем случае трехосным (рис. 16.4, в), но из формул (16.6) видно, что p_n

значительно меньше s_m и s_t , так как отношение $\frac{h}{D} \leq 40$. Оценим величину напряжения в сферическом днище. Для сферы $r_m = r_t = \frac{D}{2}$, а $s_m = s_t$ согласно (16.3), тогда

$$s_m = s_t = -\frac{P_H \cdot D}{4 \cdot h}.$$

Величины главных напряжений имеют значения:

для цилиндрической оболочки камеры $s_1 = 0, s_2 = -\frac{P_H \cdot D}{4 \cdot h}, s_3 = -\frac{P_H \cdot D}{2 \cdot h}$; для сферического днища камеры $s_1 = 0, s_2 = -\frac{P_H \cdot D}{4 \cdot h}, s_3 = -\frac{P_H \cdot D}{2 \cdot h}$.

Эквивалентное напряжение вычисленное по гипотезе максимальных касательных напряжений, для цилиндрической оболочки и сферического днища будет равно

$$s_{\text{ЭКВ}}^{\text{Ц}} = s_1 - s_3 = \frac{P_H \cdot D}{2 \cdot h}; s_{\text{ЭКВ}}^{\text{СФ}} = s_3 = -\frac{P_H \cdot D}{4 \cdot h}.$$

Из сравнения эквивалентных напряжений видно, что сферическая форма для тонкостенных сосудов, работающих под давлением более целесообразна по условиям прочности.

Для данных, принятых в примере,

$$s_{\text{ЭКВ}}^{\text{Ц}} = -s_t = \frac{P_H \cdot D}{2 \cdot h} = \frac{0,1 \cdot 800}{2 \cdot 4} = 10 \text{ МПа};$$

Коэффициент запаса прочности камеры равен

$$n_T = \frac{s_T}{s_{\text{ЭКВ}}} = \frac{200}{10} = 20$$

Большой запас прочности обусловлен тем, что при проектировании камеры толщина стенки получена из условия устойчивости.

16.3. Изгиб круглых симметрично нагруженных пластин

Некоторые варианты круглых пластин (рис. 16.5,а) нагруженных симметричной нагрузкой, показаны на рис. 16.5,б, в, г, д.

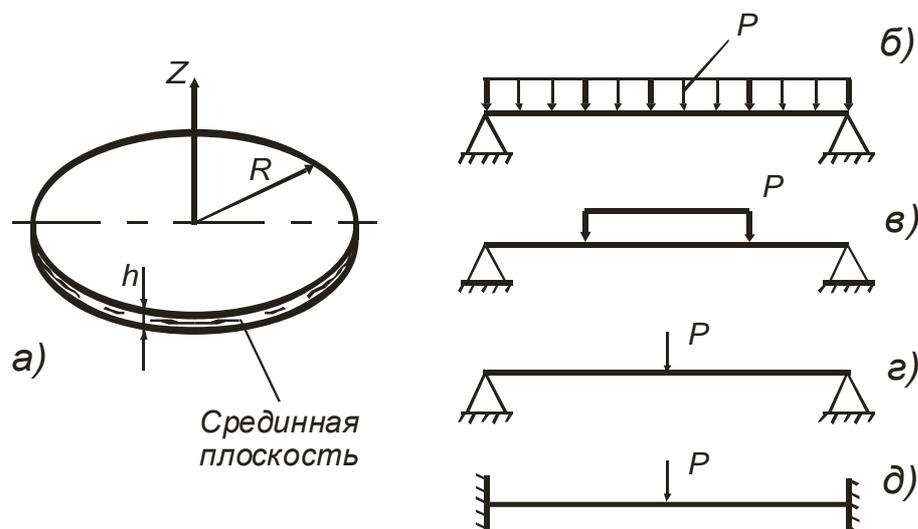


Рис. 16.5

Теория изгиба пластин основана на следующих допущениях. Первым является допущение о неискривляемости нормали. Считается, что точки, расположенные на одной прямой, нормальной к срединной поверхности до деформации, снова образуют прямую, нормальную к деформированной поверхности. Далее считается, что нормальные напряжения в сечениях, параллельных срединной поверхности ($s_z = 0$) отсутствуют. Прогибы пластины существенно меньше толщины ($W \ll h$). Последнее отличает схему расчета пластины от схемы расчета мембраны, у которой учитывается увеличение длины срединной поверхности при деформировании.

Рассмотрим деформацию шарнирно закрепленной пластины (рис. 16.6,а).

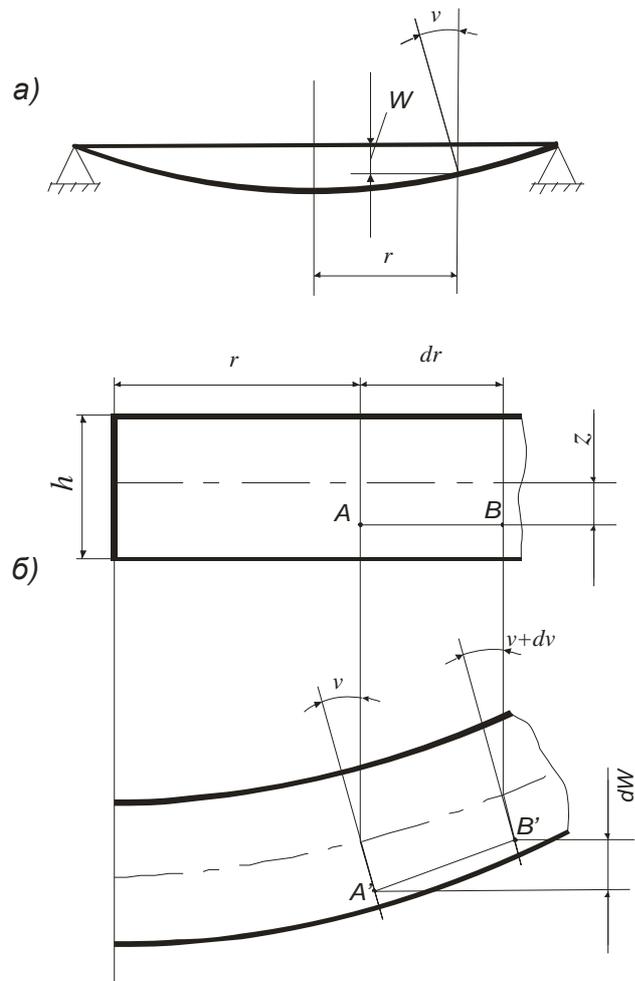


Рис. 16.6

Прогиб пластины W и угол поворота нормали J являются функциями только радиуса r и связаны между собой соотношением

$$J = -\frac{dW}{dr}.$$

Деформации в окружном e_θ и радиальном e_r направлениях зависят только от угла J и координаты z .

Рассмотрим деформацию элемента пластины, выделенного двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r+dr$ (рис.16.5,б)

$$e_r = \frac{2 \cdot p \cdot (r + z \cdot J) - 2 \cdot p \cdot r}{2 \cdot p \cdot r} = \frac{J}{r} \cdot z; \quad (16.7)$$

$$e_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(J + dJ) \cdot z - J \cdot z}{dr} = \frac{dJ}{dr} \cdot r. \quad (16.8)$$

Выделим из пластины элементарную призму двумя осевыми сечениями под углом $d\varphi$ и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$ (рис. 16.7).

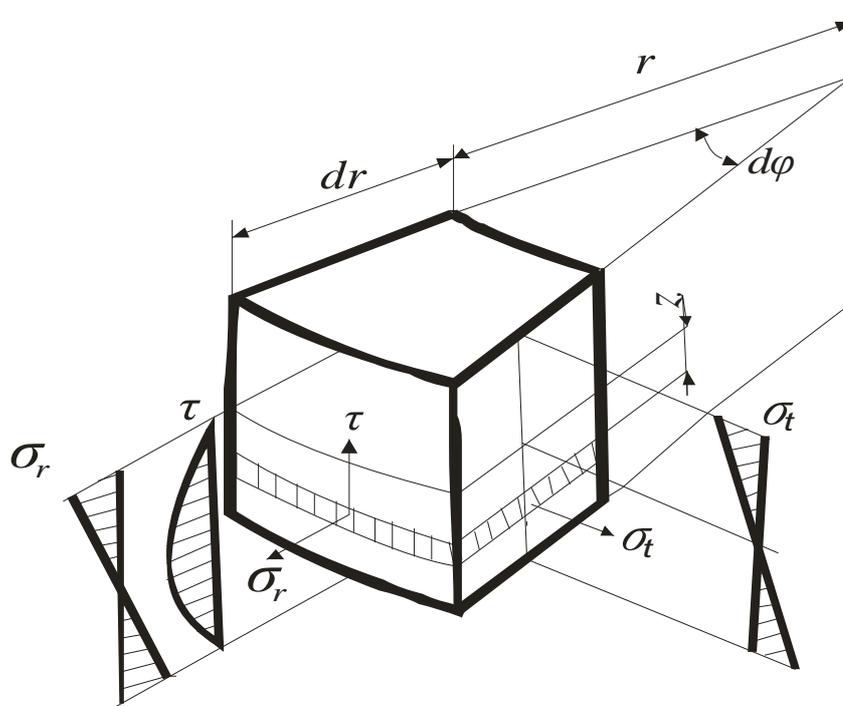


Рис. 16.7

На гранях призмы действуют нормальные напряжения: радиальные s_r и окружные s_t (касательные напряжения, возникающие в площадках, перпендикулярных к радиусу r , не учитываются). Связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука для двухосного напряженного состояния:

$$s_r = \frac{E}{1 - m^2} \cdot (e_r + m \cdot e_t); \quad s_t = \frac{E}{1 - m^2} \cdot (e_t + m \cdot e_r).$$

С учетом (16.7) и (16.8) получим выражения

$$s_r = \frac{E \cdot z}{1 - m^2} \cdot \left(\frac{dJ}{dr} + m \cdot \frac{J}{r} \right); \quad s_t = \frac{E \cdot z}{1 - m^2} \cdot \left(\frac{J}{r} + m \cdot \frac{dJ}{dr} \right). \quad (16.9)$$

Из выражения (16.9) видно, что напряжения s_r и s_t линейно изменяются по толщине пластины (рис. 16.7)

Установим связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями, между внутренними силовыми факторами и внешними. Поскольку напряжения в верхних и нижних слоях на гранях призмы одинаковы (рис. 16.7), нормальные силы на гранях отсутствуют, а нормальные напряжения приводятся к равнодействующим моментам в вертикальных плоскостях. Внутренние силовые факторы, действующие на рассматриваемую призму, показаны на рис. 16.8, где m_r - радиальный момент, m_t - окружной момент, Q - поперечная сила. Связь между погонными моментами m_r , m_t (моментами, действующими на единицу длины) и напряжениями s_r , s_t имеет вид

$$m_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s_r \cdot z \cdot dz = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \left(\frac{dJ}{dr} + \nu \cdot \frac{J}{r} \right) = D \left(\frac{dJ}{dr} + \nu \cdot \frac{J}{r} \right); \quad (16.10)$$

$$m_t = D \left(\frac{J}{r} + \nu \cdot \frac{dJ}{dr} \right), \quad (16.11)$$

где $D = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{h^3}{12}$ - жесткость пластины на изгиб.

Сравнивая выражения напряжений s_r и s_t (16.9) с выражениями для погонных моментов (16.10) и (16.11) можно записать

$$s_r = \frac{m_r \cdot z \cdot 12}{h^3}; \quad s_t = \frac{m_t \cdot z \cdot 12}{h^3},$$

откуда для $s_{r \max}$ и $s_{t \max}$, при $z = \frac{h}{2}$ получим

$$s_{r \max} = \frac{6 \cdot m_r}{h^2};$$

$$s_{t \max} = \frac{6 \cdot m_t}{h^2}.$$

Уравнения равновесия призмы в виде суммы проекций всех сил на ось z имеет вид $\sum Z_i = 0$:

$$(Q + dQ) \cdot (r + dr) \cdot dj - p \cdot r \cdot dr \cdot dj - Q \cdot r \cdot dj = Q \cdot dr + dQ \cdot r - p \cdot r \cdot dr = 0,$$

Откуда

$$p \cdot r = Q + \frac{dQ}{dr} \cdot r = \frac{d}{dr} \cdot (Q \cdot r).$$

Рассмотрим уравнение равновесия призмы в виде суммы моментов всех сил

$\Sigma M_t = 0$ относительно оси t , касательной к дуге радиуса r , расположенной на срединной плоскости (рис.16.8) $\Sigma M_c = 0$:

$$m_r \cdot r \cdot dj - (m_r + dm_r) \cdot (r + dr) - (Q + dQ) \cdot (r + dr) \cdot dj \cdot dr + p \cdot r \cdot dj \cdot \frac{dr}{2} + m_t \cdot dr \cdot dj = 0.$$

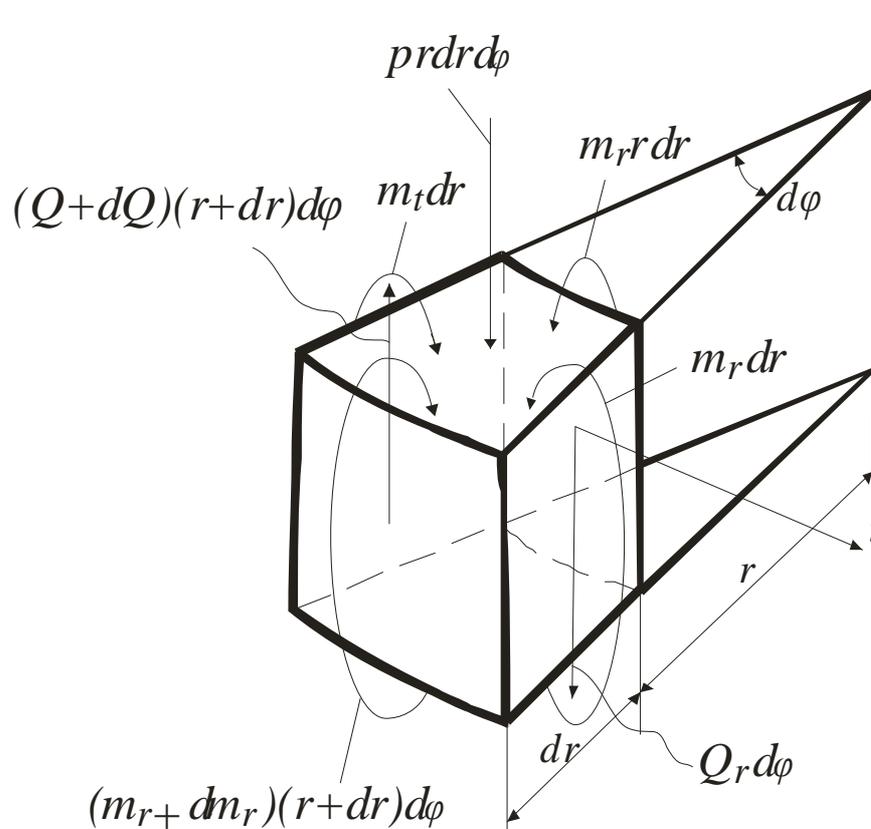


Рис. 16.8

После преобразований, пренебрегая малыми величинами высшего порядка малости, получим

$$m_t - \frac{d}{dr} \cdot (m_r \cdot r) = Q \cdot r.$$

Используя (16.10) и (16.11), имеем

$$Q \cdot r = D \left(\frac{J}{r} + m \cdot \frac{dJ}{dr} \right) - D \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{dJ}{dr} \cdot r + m \cdot J \right).$$

После преобразования находим

$$\frac{d}{dr} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot (J \cdot r) \right] = -\frac{Q}{D}.$$

Проинтегрируем полученное выражение дважды, в результате чего получим

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot (J \cdot r) = -\frac{1}{D} \cdot \int Q \cdot dr + C_1;$$

$$J = -\frac{1}{D \cdot r} \cdot \int r \cdot (\int Q \cdot dr) dr + C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}.$$

Пример 2. Определить из условия прочности необходимую толщину днища сосуда, нагруженным внутренним давлением p (рис. 16.9). В расчете принять $R = 200$ МПа, $P = 2$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа, $m = 0,3$.

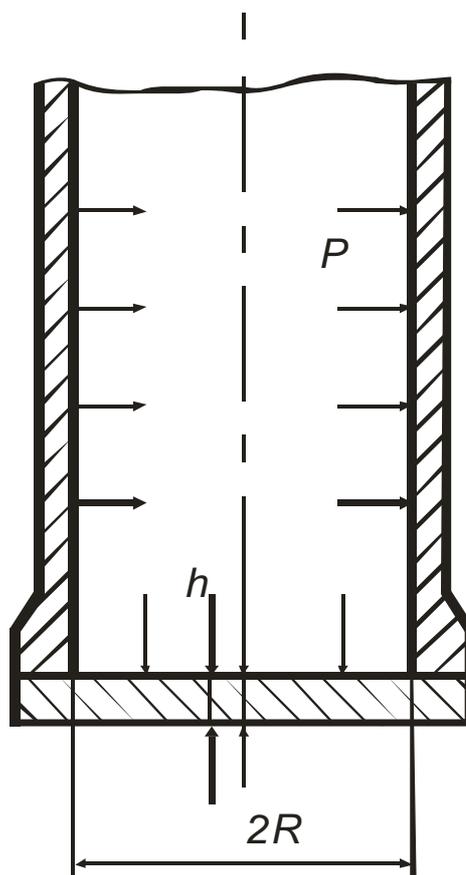


Рис. 16.9

Строгое решение требует рассмотреть совместное деформирование стенок и дна сосуда. Рассмотрим приближенное решение. Вычислим допустимое значение толщины дна отдельно для двух вариантов: 1- дно жестко заделано по контуру (сосуд имеет массивные стенки – рис. 16.10, а); 2 – дно шарнирно закреплено по контуру (сосуд имеет весьма податливые стенки – рис. 16.10, б). Необходимая толщина дна определяется как среднее между значениями, рассчитанными по 1 и 2 вариантам.

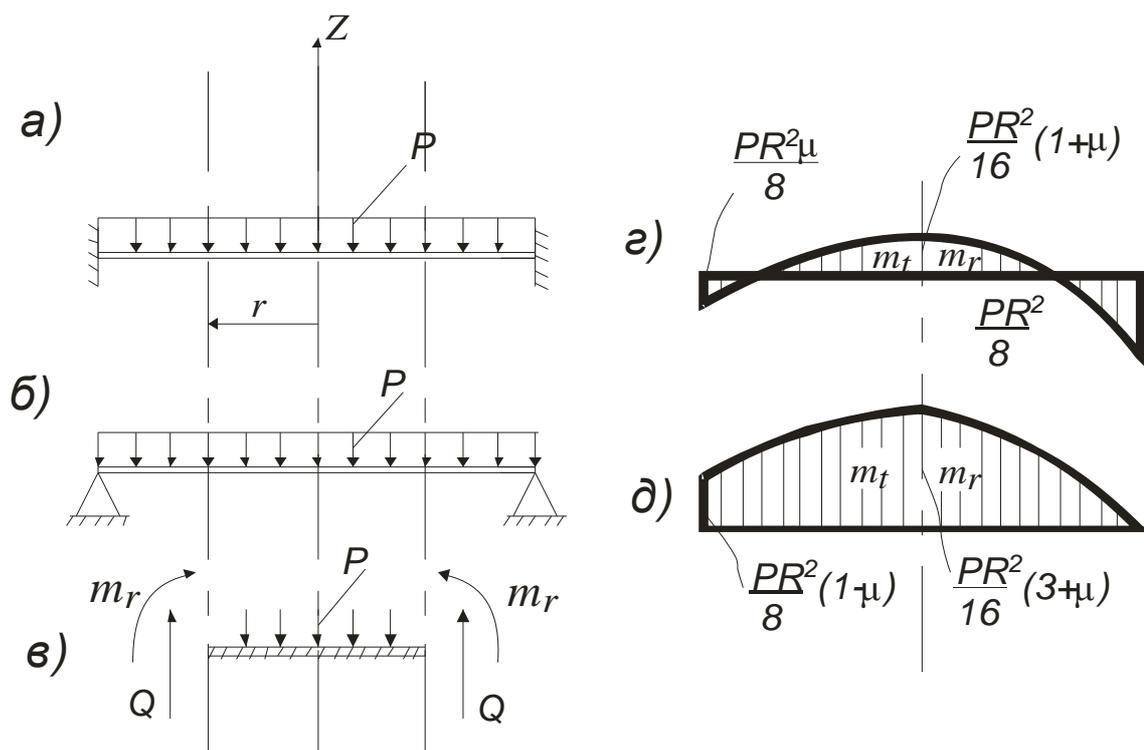


Рис. 16.10

Используем метод сечений. Рассмотрим диск радиусом r (рис. 16.10, в). Из уравнения равновесия $\sum Z_i = 0$:

$$Q \cdot 2 \cdot p \cdot r - p \cdot p \cdot r^2 = 0; \quad Q = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Подставим значение Q в (16.12)

$$J = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{D \cdot r} \cdot \int r \cdot \left(\int \frac{p \cdot r}{2} \cdot dr \right) dr = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{p \cdot r}{16 \cdot D}.$$

Для схемы рис. 16.10, а и 16.10, б при $r = 0$, $J = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом,

$$J = C_1 \cdot r - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}. \quad (16.13)$$

Для схемы рис.16.10, а при $r = R$ угол $J = 0$, откуда

$$C_1 = \frac{p \cdot R^2}{16 \cdot D}; \quad J = \frac{p}{16 \cdot D} \cdot (R^2 \cdot r - r^2).$$

Используя (16.10) и (16.11), определим изгибающие моменты:

$$m_r = \frac{p}{16} \cdot [(1 + \mu) \cdot R^2 - (3 + \mu) \cdot r^2];$$

$$m_t = \frac{p}{16} \cdot [(1+m) \cdot R^2 - (3 \cdot m + 1) \cdot r^2].$$

Вычислим значения изгибающих моментов в зависимости от радиуса:

при $r = 0$

$$m_r = m_t = \frac{p \cdot R^2}{16} \cdot (1+m);$$

при $r = R$

$$m_r = -\frac{p \cdot R^2}{8} \cdot m; \quad m_t = \frac{p \cdot R^2}{8} \cdot m.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 16.10, г.

Эквивалентное напряжение по гипотезе наибольших касательных напряжений запишем в виде

$$s_{\text{экв}} = s_1 - s_3 = -s_{r \max},$$

где

$$s_{r \max} = \frac{m_r}{\frac{h^2}{6}} = \frac{p \cdot R^2 \cdot 6}{8 \cdot h^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p \cdot R^2}{h^2} = s_{\text{экв}} \leq [s],$$

откуда допускаемое значение толщины днища

$$[h]_1 = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot p}{[s]}} = \frac{200}{2} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{160}} = 19,4 \text{ мм}.$$

Для шарнирного закрепления (схема рис. 16.10, б) при $r = R$ $m_r = 0$. Подставив в выражение (16.10) значения J и $\frac{dJ}{dr}$ из (16.13)

$$\frac{J}{r} = C_1 - \frac{p \cdot r^2}{16 \cdot D}; \quad \frac{dJ}{dr} = C_1 - \frac{3}{16} \cdot \frac{p \cdot r^2}{D};$$

$$C_1 - \frac{3 \cdot p \cdot R^2}{16 \cdot D} + m \cdot \left(C_1 - \frac{p \cdot r^2}{16 \cdot D} \right) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{(3+m)}{(1+m)} \cdot \frac{p \cdot r^2}{16 \cdot D}; \quad J = \frac{p}{16 \cdot D} \cdot \left[\frac{(3+m)}{(1+m)} \cdot R^2 \cdot r - r^3 \right].$$

Используя (16.10) и (16.11), получим

$$m_r = \frac{p}{16} \cdot (3 + m) \cdot (R^2 + r^2);$$

$$m_t = \frac{p}{16} \cdot (3 + m) \cdot \left[R^2 - \frac{(1 + 3 \cdot m)}{(3 + m)} \cdot r^2 \right].$$

Эпюра моментов показана на рис. 16.10, д. Наибольшие значения моменты принимают при $r = 0$:

$$m_r = m_t = \frac{(3 + m)}{16} \cdot p \cdot R^2;$$

$$S_{экс} = S_1 - S_3 = S_{r \max} = \frac{(3 + m) \cdot 6 \cdot p \cdot R^2}{16 \cdot h^2} \leq [h].$$

Допускаемая толщина днища

$$[h]_2 = \frac{R}{4} \cdot \sqrt{\frac{(3 + m) \cdot 6 \cdot 2}{160}} \approx 25,0 \text{ мм.}$$

Необходимая толщина днища

$$[h] = \frac{[h]_1 + [h]_2}{2} = \frac{19,4 + 25,0}{2} = 22,2 \text{ мм.}$$

Лекция 17. РАСЧЕТ ДЕТАЛЕЙ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В процессе эксплуатации в некоторых элементах конструкции возникают переменные, циклически изменяющиеся во времени напряжения. Примерами таких элементов конструкций могут служить детали рабочих органов роботоманипуляторов-захваты, детали передач и т.п., детали ИС и МЭА, подвергающиеся действию переменных нагрузок.

В условиях действия циклических напряжений материалы могут разрушаться при напряжениях существенно меньших, чем при статическом нагружении. Явление уменьшения сопротивляемости материала повторным напряжениям называют усталостью, а способность материалов сопротивляться переменным циклически изменяющимся во времени напряжениям – выносливостью. Расчет на прочность в этом случае называют расчетом на выносливость.

Картина усталостного разрушения материала существенно отличается от картины разрушения при статическом нагружении. Сначала в зоне концентрации напряжений возникают микротрещины, которые постепенно увеличиваются и проникают вглубь детали. Процесс развития трещин заканчивается хрупким изломом, происходящим без заметной пластической деформации.

Прочность материала при переменных циклически изменяющихся во времени напряжениях практически не зависит от частоты изменения напряжения, а определяется параметрами цикла изменения напряжений и количеством циклов. Циклом называют совокупность значений напряжений за один период их изменения. Цикл характеризуется величинами наибольшего σ_{\max} и наименьшего σ_{\min} напряжений в цикле, а также постоянной σ_m и переменной σ_a составляющими цикла (рис.17.1):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

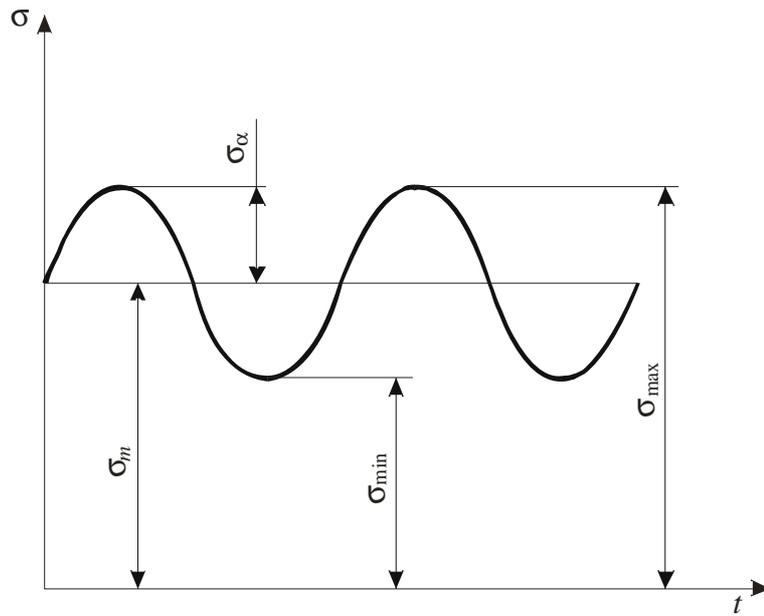


Рис.17.1

Кроме того, цикл характеризуется коэффициентом асимметрии цикла

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Формы различных циклов показаны на рис. 17.2.

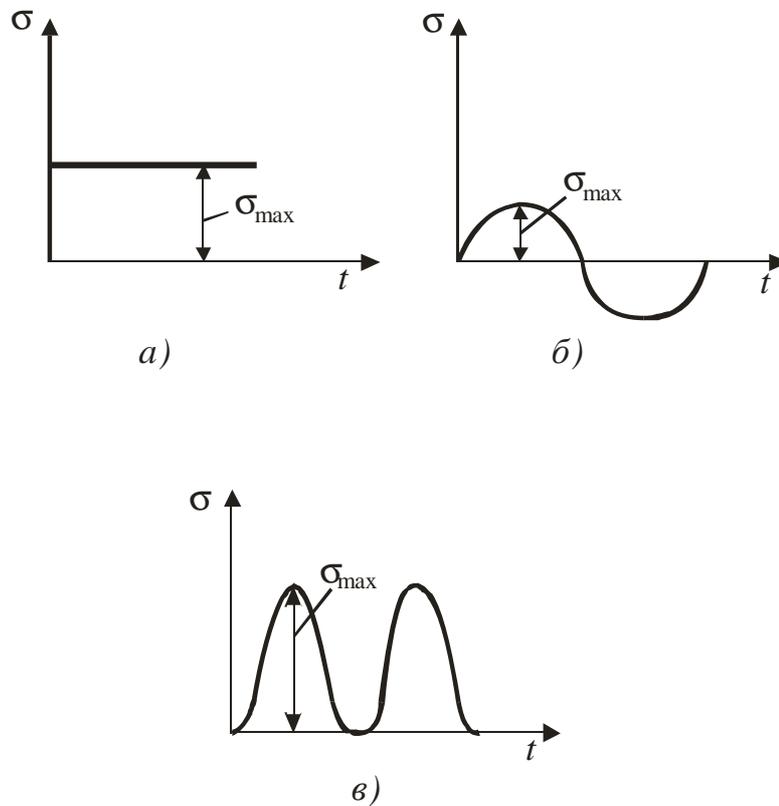


Рис.17.2

При статической нагрузке (рис. 17.2,а)

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min}, \sigma_{\alpha} = 0, \sigma_m = \sigma_{\max}, R = +1.$$

При симметричном цикле изменения напряжений (рис. 17.2,б)

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}, \sigma_a = \sigma_{\max}, \sigma_m = 0, R = -1.$$

При пульсационном цикле изменения напряжений (рис. 17.2,в)

$$\sigma_{\min} = 0, \sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2}, R = 0.$$

17.1. Предел выносливости при симметричном цикле и его экспериментальное определение

При расчете на выносливость используют характеристики прочности материалов, определенные в условиях, сходных с расчетными.

Наиболее распространены испытания в условиях симметричного цикла. Испытывают цилиндрические образцы с полированной поверхностью диаметром 5-10 мм. В опытах определяют число циклов N до разрушения образцов при различных значениях максимального напряжения σ_{\max} . По результатам испытаний строят диаграмму выносливости в координатах σ_{\max}, N (рис. 17.3).

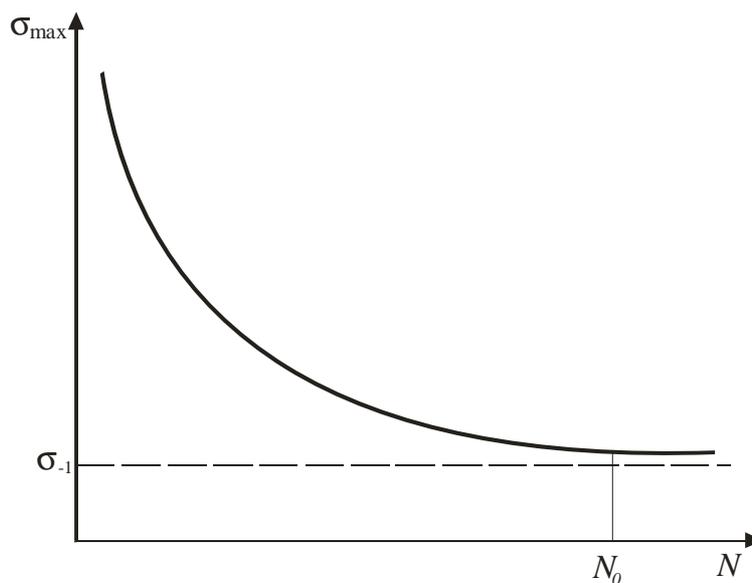


Рис.17.3

Для диаграммы выносливости характерно наличие горизонтальной асимптоты. При максимальном напряжении $\sigma_{\max} < \sigma_R$ образец может выдержать бесконечно большое или базовое N_0 число циклов нагружения, не разрушаясь. Это напряжение σ_R называют пределом выносливости образца. При симметричном цикле $R = -1$ предел выносливости обозначают $\sigma_R = \sigma_{-1}$.

Для черных металлов σ_{-1} определяют в случае предельного числа циклов $N_0 = 10^7$, для цветных металлов и закаленных сталей - при $N_0 = 10^8$ циклов. Величина предела выносливости в значительной мере зависит от вида нагружения (растяжение, изгиб). Значения предела выносливости для различных конструкционных материалов при изгибе σ_{-1} и кручении τ_{-1} , а также величины предела текучести σ_T и прочности σ_B приведены в табл. 17.1.

Т а б л и ц а 17.1

Материал	σ_m , МПа	σ_B , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа
Сталь малоуглеродистая	180	320 - 420	160 - 220	80 - 120
Сталь 4Б	340	600 - 750	250 - 340	150 - 200
Сталь 30ХГСА	1500	1700	700	400
Сплав АМЦ (термообработанный)	35 - 176	100 - 190	49 - 70	—

17.2. Влияние различных факторов на предел выносливости

Предел выносливости реальных деталей отличается от предела выносливости стандартных образцов вследствие влияния чистоты обработки поверхности, формы и размеров образцов, способа их изготовления и условий работы.

Влияние качества поверхности детали на предел выносливости при симметричном цикле характеризуется коэффициентом качества поверхности β , представляющим собой отношение предела выносливости $\sigma_{-1п}$ детали с данной обработкой поверхности к пределу выносливости σ_{-1} полированного образца

$$\beta = \frac{\sigma_{-1п}}{\sigma_{-1}}$$

Влияние размеров детали. Влияние размеров детали на предел выносливости при симметричном цикле характеризуется масштабным фактором $\varepsilon_{\sigma}(\varepsilon_{\tau})$, представляющим собой отношение предела выносливости $\sigma_{-1d}(\tau_{-1d})$ образцов заданного размера (диаметра d) к пределу выносливости $\sigma_{-1}(\tau_{-1})$ геометрически подобных стандартных образцов

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}, \quad \varepsilon_{\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}.$$

Влияние концентрации напряжений. Реальные детали могут иметь резкие изменения формы. Местное повышение напряжений вблизи отверстий, проточек, шпоночных канавок, галтелей называется концентрацией напряжений. Степень концентраций характеризуется теоретическим коэффициентом концентрации напряжений $\alpha_{\sigma}(\alpha_{\tau})$, представляющим собой отношение величины максимального местного напряжения σ_{\max} к номинальному напряжению σ в том же месте,

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}, \quad \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{\max}}{\tau}.$$

При статическом нагружении элементов конструкций из пластичных материалов местные напряжения не оказывают существенного влияния на прочность. В случае временных напряжений влияние концентрации напряжений на предел выносливости оценивается эффективным коэффициентом концентрации напряжений $k_{\sigma}(k_{\tau})$, представляющим собой отношение величины предела выносливости гладкого образца $\sigma_{-1}(\tau_{-1})$ к пределу выносливости $\sigma_{-1k}(\tau_{-1k})$ образца тех же размеров, но с концентратором напряжений

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}, \quad k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}}.$$

Связь между k_{σ} и α_{σ} выражается зависимостью

$$k_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1),$$

где q - коэффициент чувствительности материалу к местным напряжениям, зависящий от прочностных свойств материалов.

С учетом выше изложенного действительный предел выносливости реальной детали при симметричном цикле определяется как

$$\sigma_{-1q} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta}{k_{\sigma}}, \quad \tau_{-1q} = \frac{\tau_{-1}\varepsilon_{\tau}\beta}{k_{\tau}}.$$

17.3. Коэффициент запаса выносливости

Расчеты на выносливость в большинстве случаев выполняют как проверочные. Они сводятся к определению коэффициента запаса выносливости, представляющего собой отношений предела выносливости $\sigma_{-1д}$ детали к максимальному напряжению σ_{\max} , возникающему в опасной точке детали.

Для симметричного цикла

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1д}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta_{\sigma}}{\sigma_{\max}k_{\sigma}}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1д}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}\varepsilon_{\tau}\beta_{\tau}}{\tau_{\max}k_{\tau}}.$$

При произвольном цикле коэффициенты запаса по выносливости определяют по формулам Серенсена–Кинасошвили.

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon\beta}\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m}; \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{\tau}}{\varepsilon\beta}\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m},$$

где $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$ – коэффициенты приведения асимметричного цикла к равноопасному симметричному, для углеродистых сталей $\psi_{\sigma} = 0,2, \psi_{\tau} = 0,1$.

Приведем расчет на выносливость детали, испытывающих действие переменных циклически изменяющихся напряжений.

Пример. Определить коэффициент запаса выносливости внутреннего вывода микросхемы, подвергающегося действию вибрационной нагрузки. Вывод имеет прямолинейную форму, по краям жестко соединен с кристаллом и корпусом микросхемы. Расчетная схема вывода изображена на рис. 17.4. Вывод изготовлен из отрезка золотой проволоки длиной $\ell = 5$ мм, диаметром $d = 0,03$ мм. Предел прочности золота $\sigma_{\text{в}} = 120$ МПа, удельный вес $\gamma = 19,3 \cdot 10^{-5}$ Н/мм³. При вибрациях возникают ускорения $a = 40g$, где g – ускорение силы тяжести. Интенсивность равномерно распределенной инерционной нагрузки, возникающей при вибрациях q , находится по формуле $q = ta$, где t – масса единицы длины вывода (погонная масса);

$$m = \frac{\gamma \pi d^2}{4}; \quad q = \frac{\gamma \pi d^2}{4} \cdot 40g = \frac{19,3 \cdot 10^{-5} \pi (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 40}{4} = 5,45 \cdot 10^{-6} \text{ Н/мм.}$$

Вывод представляет собой статически неопределимую балку, эпюра изгибающих моментов для которой представлена на рис.17.4.

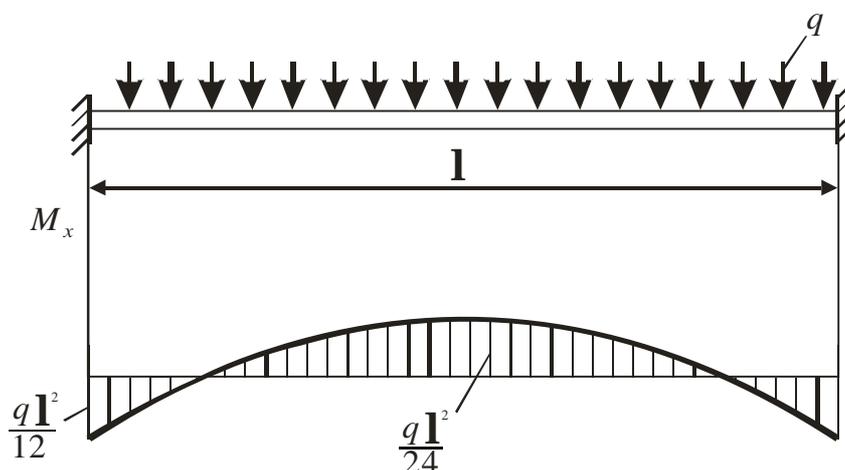


Рис.17.4.

На основании расчета статически неопределимых балок максимальный изгибающий момент равен

$$M_{\max} = \frac{q\ell^2}{12} = 11,37 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{мм.}$$

Максимальное нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max} \cdot 32}{\pi d^3} = 4,29 \text{ МПа.}$$

При расчете коэффициента запаса выносливости вывода следует принять $k_\sigma = 1$, $\varepsilon_\sigma = \beta = 1$. Напряжения при вибрациях изменяются по симметричному циклу. Предел выносливости при симметричном цикле $\sigma_{-1} = 0,45\sigma_b = 55 \text{ МПа}$. Коэффициент запаса выносливости $n = 12,8$. Вывод обладает запасом выносливости большим, чем минимально необходимый $[n] = 1,5 - 2$.

Лекция 18. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ

18.1. Основные понятия и определения

Механизмом называют систему твердых тел, подвижно связанных путем соприкосновения и движущихся требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. Преимущественно механизмы выполняют функции передачи и преобразования механического движения твердых тел.

Твердые тела, образующие механизм, называют звеньями; жидкости и газы звеньями не считают. Звенья могут состоять из одной или нескольких неподвижно соединенных между собой деталей.

Деталь – единица производства (часть машины, прибора или другого устройства), изготовленная без применения сборочных операций.

Звенья механизмов могут быть неподвижными и подвижными, совершающими вполне определенные движения; от недопустимых движений звенья ограничены соединением их между собой. Подвижное соединение двух звеньев носит название кинематической пары (КП), а места соприкосновения звеньев называют элементами КП.

Кинематические пары бывают плоскими, когда относительное движение звеньев происходит в одной плоскости или в параллельных плоскостях, и пространственными, когда звенья совершают пространственные движения. Плоские КП имеют преимущественное применение в технике, в том числе в механизмах и оборудовании микроэлектроники.

КП называют низшими, если контакт звеньев происходит по поверхности, и высшими, если соприкосновение звеньев происходит по линии или в точке. Низшие КП имеют меньший износ, большую нагрузочную способность и поэтому применяются наиболее часто.

Каждое звено в отдельности может совершать в пространстве шесть движений (рис.18.1): поступательные движения вдоль координатных осей и вращения вокруг тех же осей. Соединение звеньев в пары ограничивает возможное число их движений, так как звенья накладывают связи друг на друга. Число наложенных связей определяет класс КП. Так, пары 1-го класса (табл.18.1) имеют одну связь и, следо-

вательно, пять возможных движений; пары 2-го класса имеют две связи и четыре возможных движения; пары 3-го класса – три связи и три степени свободы; пары 4-го класса – четыре связи и два возможных движения; пары 5-го класса – пять связей и одно движение. Преимущественное применение получили кинематические пары 5-го и 4-го классов.

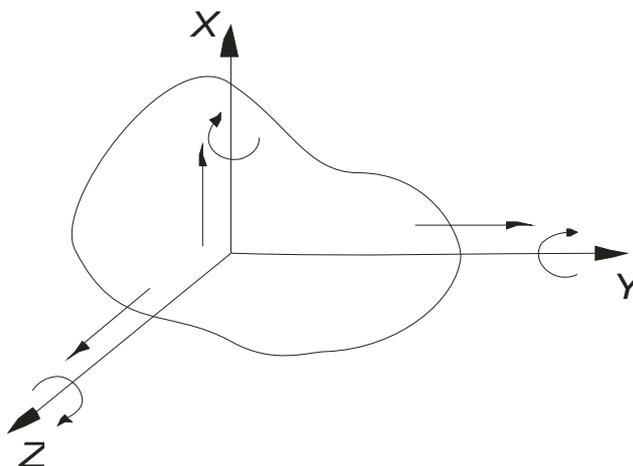


Рис. 18.1

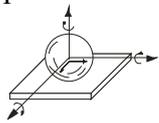
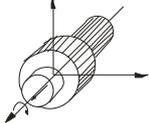
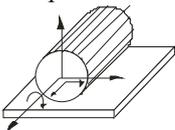
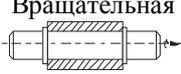
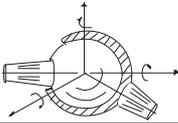
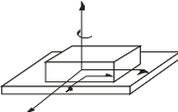
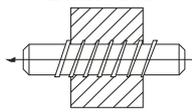
Для составления и чтения схем механизмов введены условные обозначения для различных КП и звеньев (табл.18.2). Подштриховка звена указывает на его неподвижность, зачернение говорит о жестком соединении звеньев между собой. Кружком обозначают соединение, допускающее вращательное относительное движение звеньев, а прямоугольником – поступательное движение.

Звенья КП нумеруют, а сами КП обозначают буквами. Систему звеньев, связанных посредством кинематических пар, называют кинематической цепью (КЦ). КЦ, как и КП, могут быть плоскими и пространственными.

Кинематическую цепь называют замкнутой, если каждое звено входит в две или больше КП (рис.18.2,а,б,г), и незамкнутой (разомкнутой, открытой), если хотя бы одно звено входит в одну КП (рис.18.2,в).

Если в КЦ входит звено или звенья, более чем в две КП, то такую кинематическую цепь называют сложной (рис.18.2,б,в, здесь шарниры С включают по две КП), в противном случае – простой.

Примеры кинематических пар

Класс пары	Число движений	Кинематическая пара	Класс пары	Число движений	Кинематическая пара
1	5	Шар на плоскости 	4	2	Цилиндрическая 
2	4	Цилиндр на плоскости 	5	1	Вращательная 
3	3	Сферический шарнир 	5	1	Поступательная 
3	3	Плоскостная 	5	1	Винтовая 

Различают кинематические цепи определенные, если движение всех звеньев происходит по определенному закону (рис.18.2,а,б,г), и неопределенные, если в КЦ есть звенья, не имеющие определенного закона движения (рис.18.2,в). Определенная КЦ является механизмом. В механизме различают звенья ведущие (входные), которые получают движение от внешних источников, и ведомые, т.е. все остальные звенья. Выходное звено – это звено, для движения которого предназначен механизм.

Графическое изображение кинематической цепи называют ее структурной схемой, на которой ведущие звенья отмечают стрелками: дуговой – звенья, совершающие вращательное движение (рис.18.2, а,в,г), и линейной – звенья с поступательным движением (рис.18.2,б).

Для поступательного механизма, имеющего n подвижных звеньев, формулу для определения числа степеней можно составить следующим образом. Если подвижные звенья в механизме разъединить, то они все вместе будут иметь $6n$ возможных движений, так как каждое свободное звено имеет шесть степеней свободы. Поскольку звенья соединены кинематическими парами, причем пары 1-го класса на-

кладывают одну связь, пары 2-го класса – две связи и т.д., то степень свободы W всей кинематической цепи равна

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (18.1)$$

где p_5 , p_4 , p_3 , p_2 и p_1 – число пар соответственно 5-го, 4-го, 3-го, 2-го и 1-го классов в цепи.

Таблица 18.2

Условные графические обозначения

Элементы механизмов	Графическое изображение
Звено: подвижное неподвижное	
Опора для звена: Неподвижная (а) Подвижная (б, в)	
Соединение звеньев: жесткое Подвижное, вращательная КП 5-го класса (низшая КП)	
КП 4-го класса (высшая КП)	
Поступательная КП 5-го класса (низшая КП)	
Поступательно-вращательная КП 5-го класса (низшая КП): с трением скольжения с трением качения	

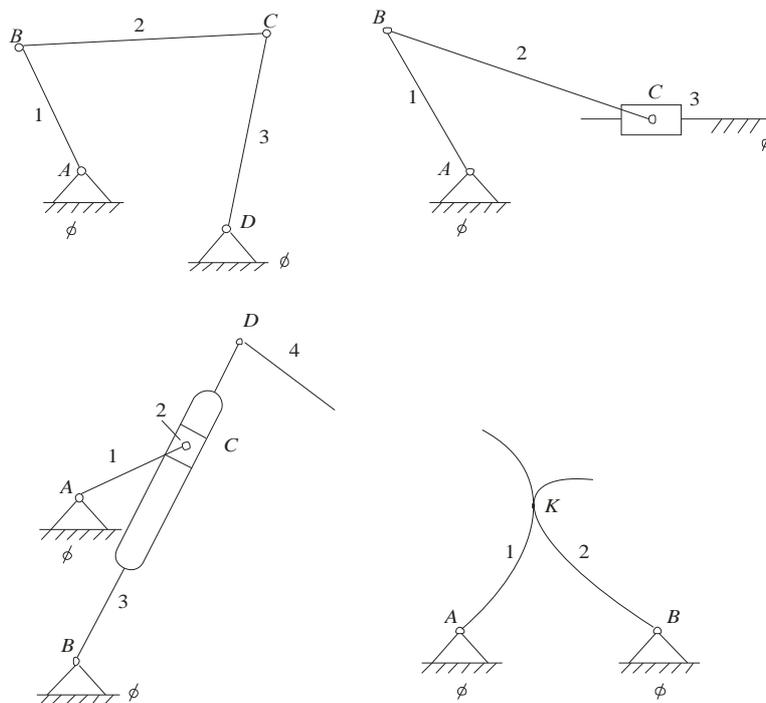


Рис. 18.2

Для плоской кинематической цепи дополнительно накладываются три общие связи, поэтому в такой цепи каждое звено может иметь только три возможных движения, а КП могут быть только 4-го и 5-го классов. Для плоской КЦ формула имеет следующий вид:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (18.2)$$

или

$$W = 3n - 2p_n - p_v,$$

где $2p_n - p_v$ – число соответственно низших и высших КП.

Приведенные формулы позволяют определить число степеней свободы механизма по его структурной схеме. Большинство механизмов имеет одну степень свободы. Если $W > 1$, для определенности движения звеньев количество ведущих звеньев принимают равным W , т.е. механизм в таком случае становится многодвигательным.

Если $W = 0$, то это свидетельствует о вырождении КЦ в жесткую неподвижную систему – ферму. При подсчете числа кинематических пар в КЦ следует учитывать двойные, тройные и т.д. шарниры, так как каждый из таких шарниров считают за две, три и т.д. кинематические пары.

18.2. Классификация механизмов. Передачи

Механизмы классифицируют, учитывая их конструктивные особенности, кинематические свойства и функциональное назначение. Различают пять основных видов механизмов: шарнирно-рычажные, кулачковые, фрикционные, зубчатые и с гибкими связями. Существуют и другие виды механизмов, например, мальтийские, винтовые, храповые и т.д.

Шарнирно-рычажные механизмы. Среди многообразия механизмов этого вида значительное распространение получили коромысловые (рис.18.2, а), кривошипно-ползунные (рис.18.2, б), кулисные (на рис.18.2, в изображена КЦ неопределенная; если мысленно отбросить звено 4, то эта КЦ превращается в кулисный механизм) и ряд других, например, синусные, тангенсные и др.

В механизмах, приведенных на рис.18.2, а-г звено 1, совершающее полный оборот относительно своей оси вращения, называют кривошипом; звено 3 (рис.18.2,а), совершающее возвратно-вращательное движение, называют коромыслом, а звено 3 (рис.18.2, б), совершающее возвратно-поступательное движение, - ползуном; звено 2 (рис.18.2, а,б), совершающее сложное плоско-параллельное движение, называют шатуном. Подвижную направляющую (звено 3, рис.18.2, в), называют кулисой, а ползун, совершающий сложное движение (звено 2, рис.18.2, в), - кулисным камнем.

Коромысловые механизмы применяют в прессах, качающихся конвейерах, приборах и т.д. Кривошипно-ползунные механизмы являются основными в поршневых машинах (двигатели внутреннего сгорания, насосы, компрессоры). Кулисные механизмы используют в строгальных и долбежных станках, поршневых насосах и компрессорах, приборах и др. Синусные, тангенсные и другие подобные механизмы применяют для выполнения соответствующих функциональных зависимостей в приборах, системах управления и т.д.

Кулачковые механизмы. На рис.18.3 приведены схемы простейших плоских кулачковых механизмов (КМ). Они состоят из кулачка (звено 1), толкателя (звено 2) со стойкой, совершающих вращательное или поступательное движение. Эти трехзвенные механизмы содержат две КП 5-го класса (низшие КП) и одну КП 4-го класса (высшая КП).

Благодаря наличию высшей КП в кулачковых механизмах при минимальном числе звеньев можно получить практически любой закон движения выходного зве-

на. Основной недостаток высшей кинематической пары – необходимость силового или геометрического замыкания звеньев.

Для уменьшения износа кулачка и толкателя в месте их соприкосновения вводят ролик (звено 3 на рис.18.3, б), позволяющий заменить трение скольжения трением качения (в точке В). Толкатели могут быть грибовидными (рис.18.3,а), с острием (рис.18.3, в), плоскими (рис.18.3, г) и др. Отметим, что с помощью толкателя с острием можно реализовать профили кулачков практически с любыми радиусами кривизны переходных кривых. Толкатели грибовидные и роликовые могут реализовать профили кулачков с большими радиусами кривизны, чем толкатели с острием, а плоские толкатели – только выпуклые профили кулачков.

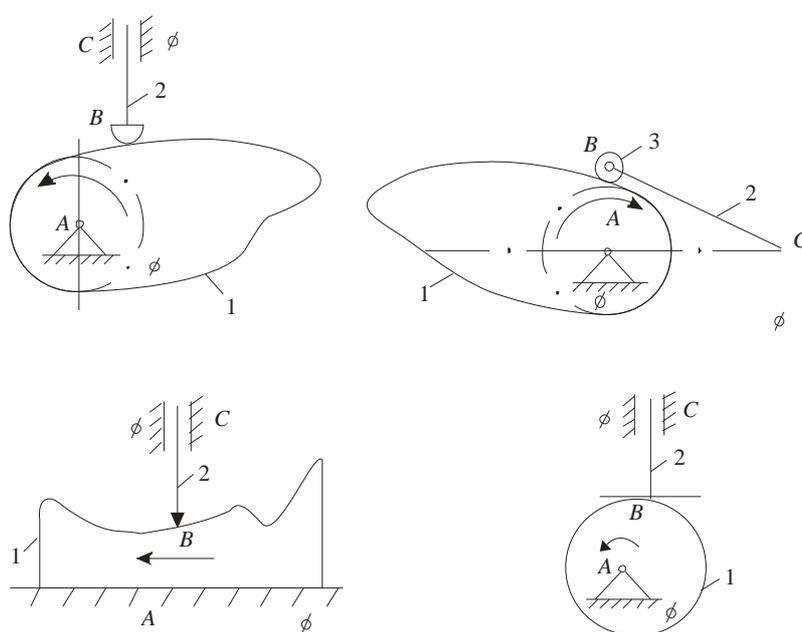


Рис. 18.3

Находят применение также пространственные КМ с одной и двумя степенями свободы. Благодаря простоте конструкций, кинематической универсальности, надежности и точности работы кулачковые механизмы получили широкое распространение в технике – в различных автоматических, полуавтоматических, счетно-решающих и других механических устройствах. Ограничение области применения КМ обуславливается большими удельными давлениями в высшей паре, инерционными нагрузками, низким КПД.

Фрикционные механизмы. В таких механизмах движение осуществляется посредством сил трения между звеньями, образующими высшую КП. Простейший фрикционный механизм состоит из трех звеньев: двух катков (звенья 1 и 2 на

рис.18.4) и стойки. Замыкание высшей пары – силовое. Высшая КП (точка контакта катков) может располагаться между центрами вращения катков (рис.18.4, а), что соответствует внешнему контакту (касанию, зацеплению); в этом случае направления вращения катков противоположны. При внутреннем контакте (зацеплении, касании) катки вращаются в одну и ту же сторону и высшая КП находится за пределами центров вращения катков.

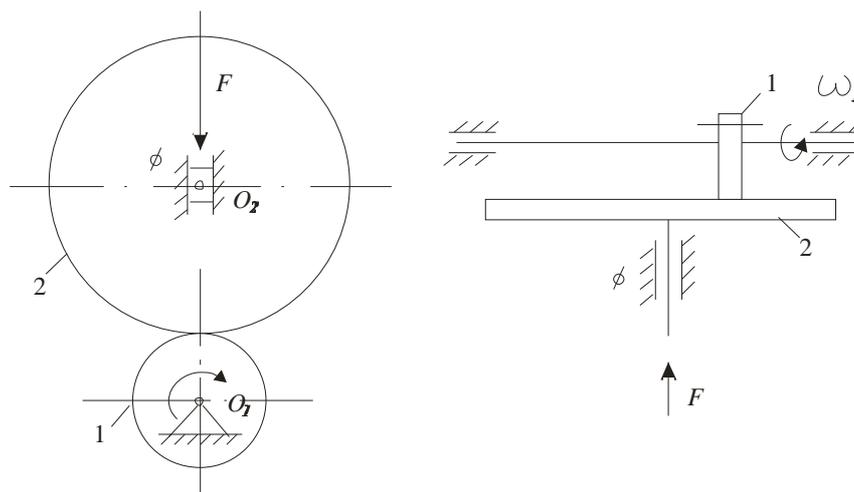


Рис. 18.4

Различают фрикционные механизмы с нерегулируемой скоростью вращения ведомого звена (рис.18.4, а) и с бесступенчатым (плавным) ее регулированием (рис.18.4, б). В последнем случае при перемещении звена 1 вдоль оси его вращения скорость ведомого звена 2 плавно изменяется при постоянной скорости вращения звена 1. Такие механизмы называют вариаторами.

В зависимости от расположения осей катков различают катки цилиндрические – при параллельных осях (рис.18.4, а), конические – при пересекающихся осях и лобовые – при перекрещивающихся осях (рис.18.4, б). Фрикционные механизмы используют преимущественно в приборах, где требуются плавность и бесшумность работы, отсутствуют высокие нагрузки и необходимо строгое взаимное положение катков во времени. Вариаторы широко применяют в технике, например, в металлорежущих станках, транспортирующих машинах и т.д.

Зубчатые механизмы. Этот вид механизмов осуществляет передачу движения от одного звена к другому посредством зацепления зубьев. Простейший зубчатый механизм состоит из двух зубчатых колес и стойки (рис.18.5).

Профили зубьев, их форму и размеры подбирают таким образом, чтобы механизм обладал максимальной нагрузочной способностью при минимальных габаритах и весе и высоком значении коэффициента полезного действия (КПД). Зубчатые механизмы различают по взаимному расположению осей: с параллельными осями (цилиндрические с зацеплением внешним – рис.18.5, а, в, и внутренним – рис.18.5, б), с пересекающимися осями (конические – рис.18.5, г) и со скрещивающимися осями (винтовые – рис.18.5, е, гипоидные – рис.18.5, д, червячные – рис.18.5, ж). Для преобразования вращательного движения в поступательное, или наоборот, применяют механизм (рис.18.5, з), в котором диаметр одного из колес увеличен до бесконечности, т.е. окружность этого колеса вырождена в прямую – рейку.

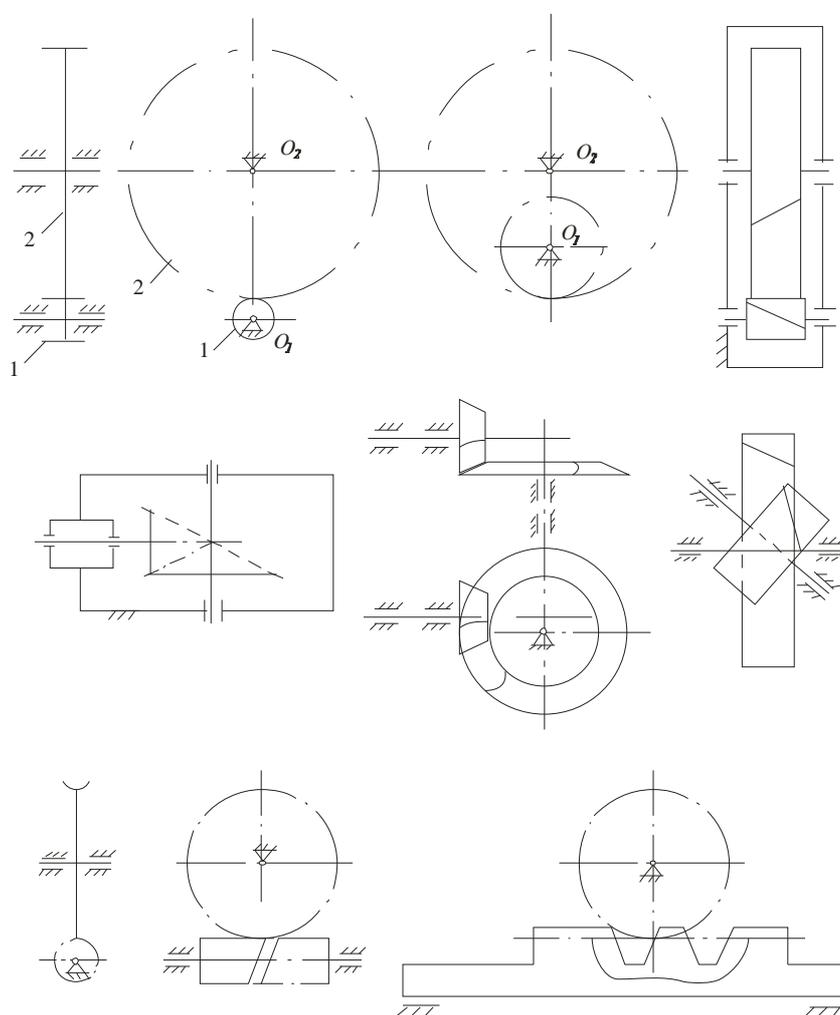


Рис. 18.5

По расположению зуба различают колеса прямозубые (рис.18.5, а, г), косозубые (рис.18.5, в), с круговым зубом (рис.18.5, д). Применяют профили зубьев, в ос-

нову которых положены следующие технические кривые: эвольвента, циклоида, окружность и другие.

Используют зубчатые механизмы с неподвижными и подвижными осями колес. Последние называют планетарными механизмами. Простейшая схема такого механизма показана на рис.18.6. Он состоит из двух центральных колес *a* и *b* (звенья в планетарных механизмах чаще всего обозначают буквами), колеса *g* с подвижной осью, называемого сателлитом, и звена *H*, называемого водилом. В планетарном механизме, как правило, несколько сателлитов.

Если степень подвижности зубчатого механизма с подвижными осями колес $W = 1$, то его называют планетарным, а если $W > 1$, то его называют дифференциальным.

В последнее время находят применение волновые зубчатые механизмы с гибкими звеньями (рис.18.7). Они состоят из гибкого колеса *F*, жесткого колеса *C* и генератора волн *H*.

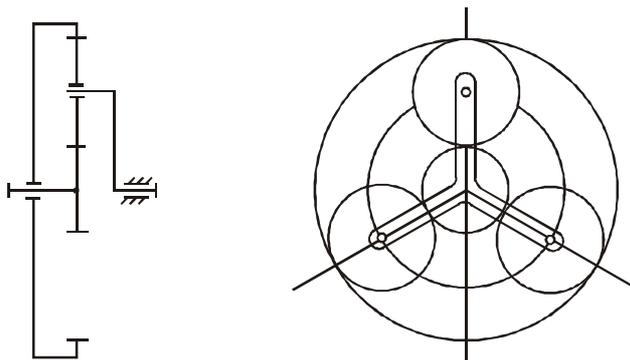


Рис. 18.6

Достоинства зубчатых механизмов: высокая нагрузочная способность, малые габариты, высокие значения КПД, строгое взаимное положение ведущего и ведомого звеньев относительно друг друга во времени. В связи с этим зубчатые механизмы наиболее широко используются в технике.

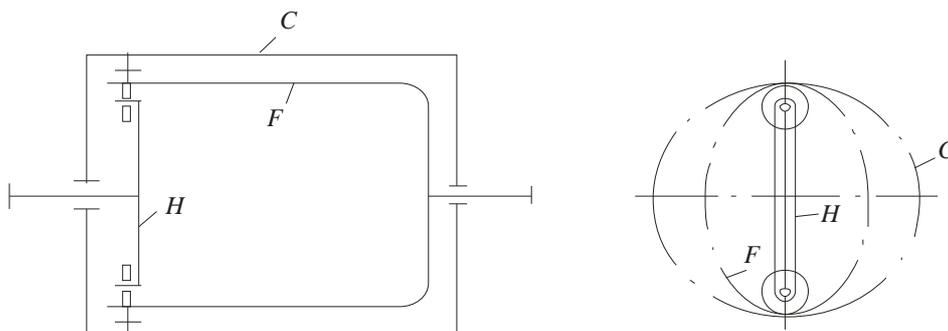


Рис. 18.7

Механизмы с гибкой связью. Такие механизмы предусматривают наличие между ведущим и ведомым звеньями дополнительного звена – гибкой связи. Изгибная жесткость связи несоизмеримо мала по сравнению с жесткостью ведущего и ведомого звеньев, поэтому связь называют гибкой. Гибкую связь вводят для облегчения механизмов и уменьшения их габаритов при передаче движения на большие расстояния.

По характеру соединения гибкой связи со звеньями различают сцепление фрикционное, зацеплением и жесткое. Гибкая связь может быть замкнутой (рис.18.8, а) и разомкнутой (рис.18.8, б). Ведущее и ведомое звенья называют шкивами, роликами, звездочками, барабанами и т.п.

В механизмах с фрикционным сцеплением в качестве гибкой связи применяют ремни, пассики, шнуры. Необходимым условием передачи движения является натяжение гибкой связи.

В механизмах с зацеплением гибкая связь представляет собой перфорированную ленту, зубчатый ремень, цепь и т.п.

При жестком сцеплении гибкой связи со звеньями в качестве последней используют преимущественно ленты, реже тросики; такие механизмы обеспечивают наибольшую точность и применяются в точных приборах.

Механизмы с замкнутой гибкой связью (ременные, цепные) широко применяют в приводных механических устройствах общего и специального назначения. При этом различают механизмы с гибкой связью с нерегулируемой скоростью выходного звена, со ступенчатым регулированием и с плавным регулированием (вариаторы).

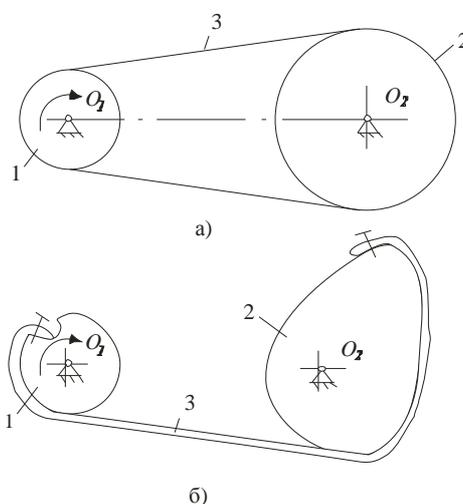


Рис. 18.8

Гибкое звено может быть использовано и в качестве рабочего органа в транспортирующих устройствах, например, в ленточных, пасиковых и цепных конвейерах. Механизмы с разомкнутой связью (ленточные, верньерные и др.) нашли применение преимущественно в приборостроении и радиотехнике.

Передачи. Наряду с общим названием "механизм" используют термин "передаточный механизм", или просто "передача". При этом под термином "передача" понимают механизм, состоящий из двух подвижных звеньев – ведущего и ведомого – и имеющий специфические черты. В этом смысле типичными передачами являются рассмотренные выше механизмы: фрикционные, зубчатые, с гибкой связью.

Введя понятие "передача", сложный механизм можно составить в виде набора простых передач. Для отдельных передач проще установить оптимальные соотношения параметров и соответствующие закономерности движения. Таким образом, сложный механизм при анализе может быть разложен на отдельные простые передачи, при синтезе составлен из набора соответствующих передач.

Конструктивно передачи выполняют закрытыми и открытыми. Закрытые передачи помещают в герметичные корпуса (см. рис.18.5, в, г), в которые вводят жидкую или консистентную смазку для лучшей работы трущихся элементов передач. Открытые передачи не защищены от воздействия окружающей среды, смазка трущихся элементов затруднена.

18.3. Передаточное отношение. Передаточное число

Из приведенной классификации механизмов можно видеть, что они не только передают движение от ведущего звена к ведомым, но и преобразуют это движение по виду (поступательное, вращательное, сложное), величине и направлению. Для количественной меры преобразования движения вводят кинематическую характеристику, представляющую собой отношение скоростей ведущего и ведомого звеньев.

Применительно к механизмам, звенья которых совершают только вращательное движение, кинематическую характеристику называют передаточным отношением. Обозначив передаточное отношение через i , а угловые скорости ведущего и ведомого звеньев соответственно через ω_1 и ω_2 , можно записать:

$$i_{12} = \pm \frac{\omega}{\omega_2}, \quad i_{21} = \pm \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{и} \quad i_{12} = \frac{1}{i_{21}}. \quad (18.3)$$

Последовательность индексов при i означает, от какого к какому звену оценивается преобразование движения. Передаточное отношение может быть положительным, если угловые скорости звеньев совпадают по направлению, и отрицательным, если они направлены в разные стороны.

В зависимости от величины i различают механизмы понижающие ($i > 1$) и повышающие ($i < 1$). Первые механизмы называют редукторами, вторые – мультипликаторами. В технике преимущественно используются редукторы.

В технических расчетах также применяют более узкое понятие "передаточное число"; это частный случай передаточного отношения, которое берется без учета знака и больше или равно единице. Для передаточного числа стандартом введено обозначение u . Следовательно, можно записать:

$$u = \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| \text{ при } \omega_1 \geq \omega_2$$

или

$$u = \left| \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| \text{ при } \omega_2 \geq \omega_1.$$

(18.4)

Для механизма, состоящего из n последовательно соединенных передач, передаточное отношение всего механизма может быть найдено как произведение частных передаточных отношений отдельных передач:

$$i_{in} = \frac{\omega_i}{\omega_1} (1^{-j}) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \dots \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \cdot (1^{-j}) = i_{12} \cdot i_{23} \dots i_{(n-1)n}, \quad (18.5)$$

где j – количество передач с внешним зацеплением.

Если ведущее и ведомые звенья имеют разные характеры движения, то для кинематической характеристики вводят более общее понятие "передаточная функция". Например, для кулачкового механизма с вращающимся кулачком и поступательно движущимся толкателем (см. рис.18.3,а) передаточную функцию можно записать так:

$$k = \frac{v_T}{\omega_K} = \frac{ds}{d\varphi} = s, \quad (18.6)$$

где k – передаточная функция, которую также называют аналогом скорости; v_T – линейная скорость толкателя, м/с; ω_k – угловая скорость кулачка, 1/с; s – линейное перемещение толкателя, м; φ – угловое перемещение кулачка, рад.

Нетрудно видеть, что передаточная функция в общем случае является производной перемещения и может иметь размерность, например в том случае, когда звенья имеют разные характеры движения. Для механизмов, у которых звенья имеют одинаковые характеры движения, передаточная функция является безразмерной величиной, в частности, для вращающихся звеньев эта функция вырождается в передаточное отношение.

Передаточное отношение, как и передаточная функция, для одних механизмов имеет переменную во времени величину (в том числе и знак), а для других – постоянную. Наибольшее применение в технике получили механизмы с постоянным передаточным числом. Передаточное отношение как характеристика передачи играет важную роль в теории механических передач, поэтому приведем для него базовую теорему.

18.4. Теорема о мгновенном передаточном отношении

Для нормального функционирования кинематических пар в механизмах необходимо выдержать два условия:

1) геометрическое условие, которое требует наличия в области контакта звеньев общей нормали к соприкасающимся поверхностям (нормаль $n - n$ на рис.18.9); в противном случае наблюдается интерференция внедрения одной контактирующей поверхности в другую с разрушением менее прочной детали;

2) кинематическое условие, которое требует равенства $v_1^n = v_2^n$ проекций линейных скоростей звеньев v_1 и v_2 (рис.18.9) на общую нормаль; если $v_1^n \neq v_2^n$, то контакт звеньев нарушается – соприкасающиеся поверхности или внедряются друг в друга, или расходятся.

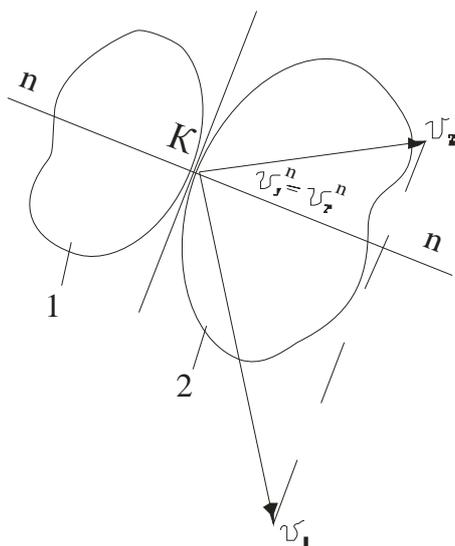


Рис. 18.9

На рис.18.10 для высшей КП, образованной двумя вращающимися звеньями 1 и 2, эти два условия выполнены. Соединив точку К контакта звеньев с центрами их вращения O_1 и O_2 и опустив перпендикуляры из этих центров на общую нормаль $n - n$, получим геометрические построения, достаточные для доказательства теоремы о мгновенном передаточном отношении.

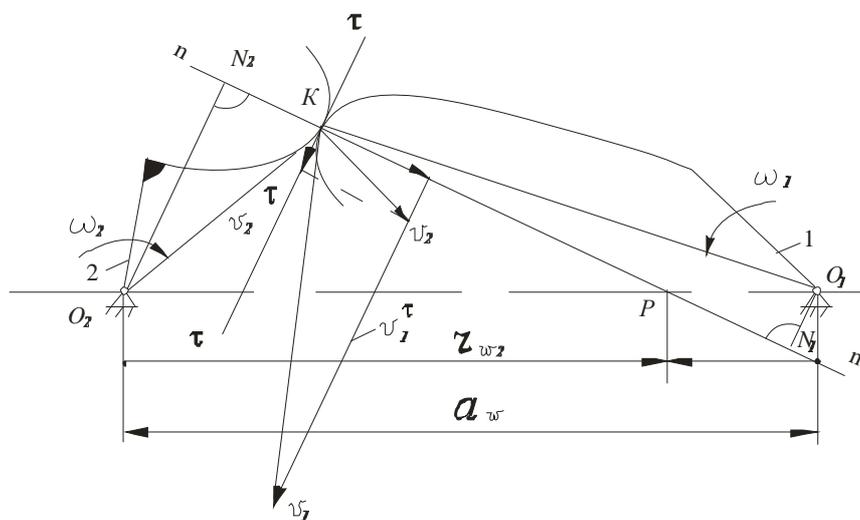


Рис. 18.10

Из подобия треугольников O_1N_1K и Kv_1v^n (все стороны этих треугольников взаимно перпендикулярны) следует:

$$v_1^n = \frac{v_1}{O_1K} \cdot O_1N_1 = \omega_1 \cdot O_1N_1.$$

Треугольники O_2N_2K и Kv_2v^n также подобны, поэтому

$$v_2^n = \frac{v_2}{O_2K} \cdot O_2N_2 = \omega_2 \cdot O_2N_2$$

и, следовательно,

$$\omega_1 O_1 N_1 = -\omega_2 O_2 N_2;$$

здесь знак "-" указывает, что ω_2 имеет противоположное направление по сравнению с ω_1 .

Далее, учитывая подобие треугольников $O_1 N_1 P$ и $O_2 N_2 P$, можно записать:

$$\omega_1 \cdot O_1 P = -\omega_2 \cdot O_2 P.$$

Дадим отрезкам $O_1 P$ и $O_2 P$ векторное толкование, обозначив их соответственно r_{w1} и r_{w2} . Тогда последнее равенство запишем в следующем виде:

$$-\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = i_{12}. \quad (18.7)$$

Для механизма, представленного на рис.18.10, теорема доказана. Теорему можно сформулировать так: общая нормаль делит линию центров на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Точку P пересечения общей нормали $n - n$ с линией центров O_1 и O_2 называют полюсом зацепления. Механизмы, у которых полюс зацепления расположен между центрами вращения O_1 и O_2 , называют передачами с внешним зацеплением; если полюс зацепления P расположен за пределами межосевого расстояния a_w , - передачами с внутренним зацеплением.

Если в механизме направления угловых скоростей совпадают (рис.18.11), то полюс P лежит за пределами линии центров и векторы r_{w1} r_{w2} имеют одинаковое направление. Для таких механизмов в формуле (18.7) i_{12} будет иметь положительный знак. Учитывая это, математически теорему о мгновенном передаточном отношении запишем в окончательном виде (опустив символы векторов):

$$i_{12} = \mathbf{m} \frac{\omega_1}{\omega_2} = \mathbf{m} \frac{r_{w2}}{r_{w1}}, \quad (18.8)$$

где знак "-" - для внешнего зацепления, знак "+" - для внутреннего зацепления.

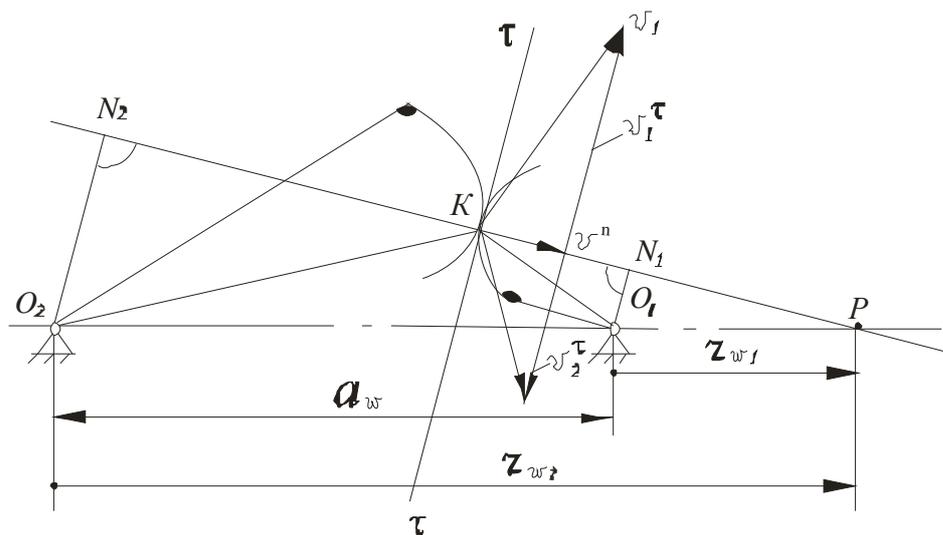


Рис. 18.11

Обратимся теперь к проекциям v_1^τ и v_2^τ линейных скоростей v_1 и v_2 на касательную $\tau - \tau$ (рис.18.10 и 18.11), которые характеризуют скольжение профилей при вращении звеньев в передаче. Можно видеть, что для передач с внешним зацеплением эти проекции скоростей по направлению совпадают (рис.18.10), а для передач с внутренним контактом направлены в разные стороны:

$$v_{ск} = v_1^\tau \pm v_2^\tau,$$

или

(18.9)

$$v_{ск} = PK (\omega_1 \pm \omega_2),$$

где $v_{ск}$ – скорость скольжения профилей в контакте звеньев; v_1^τ и v_2^τ - проекции линейных скоростей на касательную $\tau - \tau$ (рис. 18.10 и 18.11); PK - расстояние от точки K контакта звеньев до полюса P .

Анализ формул (18.9) показывает, что передачи с внутренним зацеплением при прочих равных условиях имеют меньшие скорости скольжения профилей и, следовательно, более благоприятные условия работы (меньше износ, большие значения КПД). Важно отметить, что скорость скольжения в полюсе зацепления равна нулю (так как $PK = 0$), т.е. в полюсе передачи происходит чистое качение профилей. Поэтому при конструировании подбирают такие профили контактирующих поверхно-

стей и такие параметры механизмов, чтобы контакт звеньев или совпадал с полюсом, или был максимально приближен к нему ($PK \Rightarrow 0$).

На рис.18.12 показаны кривые, соединяющие концы радиусов-векторов r_{w1} r_{w2} за некоторый промежуток времени при вращении звеньев механизма с внешним зацеплением: за полный оборот звеньев такие кривые будут замкнутыми. Если представить эти кривые в виде профилей, принадлежащих соответственно звеньям 1 и 2 механизма (рис.18.12), то передача движения между этими звеньями будет осуществляться при перекатывании профилей друг по другу без скольжения. Указанные кривые в теории зубчатых передач называют полоидными, или начальными (а также аксоидами и центроидами).

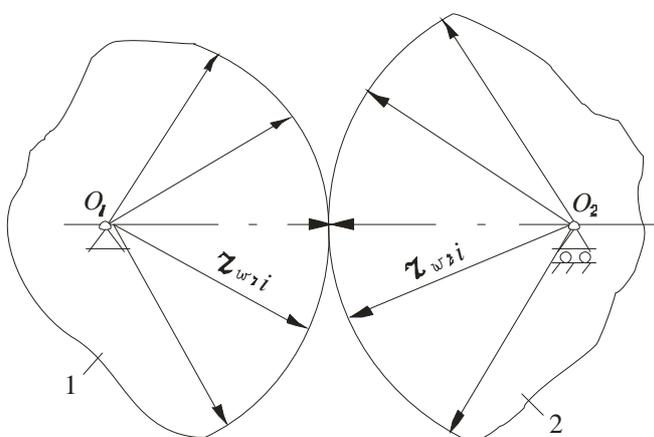


Рис. 18.12

При перекатывании полоидных кривых мгновенное передаточное отношение $i_{12} = r_{w2} / r_{w1}$ и межосевое расстояние a_w в общем случае могут быть переменными. Если на механизм наложить условия $i_{12} = const$ и $a_w = const$, то полоидные кривые вырождаются в начальные (полоидные) окружности с радиусами r_{w1} и r_{w2} , соотношение между которыми имеет вид

$$r_{w2} \pm r_{w1} = a_w; \quad (18.10)$$

В формулах (18.9) и (18.10) знак "+" для передач с внешним зацеплением, а знак "-" - для передач с внутренним зацеплением.

Примеры:

Пример 18.1. Определить степень свободы кинематической цепи, показанной на рис.18.2а.

Решение. В этой КЦ число подвижных звеньев $n=3$, количество вращательных КП 5-го класса $p_5=4$ (КП в шарнирах А,В,С,Д, образованные звеньями 0-1, 1-2, 2-3, 3-0); кинематические пары 4-го класса отсутствуют, т.е. $p_4=0$. По формуле (18.2) находим число степеней свободы

$$W=3n-2p_5-p_4=3\cdot 3-2\cdot 4-0=1.$$

При одном ведущем звене (звено 1) эта КЦ является механизмом.

Пример 18.2 Определить число степеней свободы КЦ, показанных:

а) на рис.18.2,б

Ответ: $W=1$, эта цепь является механизмом (ведущее звено 3)

б) на рис. 18.2,в

Ответ: $W=2$, эта КЦ является неопределённой (ведущее звено 1), разомкнутой (звено 4 входит только в одну КП).

в) на рис.18.2,г

Ответ: $W=1$, эта КЦ является механизмом с высшей КП в точке К.

Вопросы для самопроверки (к лекции 18):

1. Дайте определение для механизма, звена и детали.
2. Какими бывают кинематические пары и кинематические цепи.
3. Какие введены условные обозначения для кинематических пар и звеньев.
4. Как классифицируют механизмы.
5. Назовите пять основных видов механизмов.
6. Что понимают под термином "передача".
7. Дайте определение для передаточной функции, передаточного отношения и передаточного числа.
8. Сформулируйте теорему о мгновенном передаточном отношении.

Лекция 19. ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

19.1. Эвольвента и ее свойства

Наиболее применяемыми в механических устройствах являются передачи с эвольвентным профилем зубьев. Эвольвента – это техническая кривая, представляющая собой траекторию точки, принадлежащей прямой, катящейся без скольжения по окружности (рис.19.1). Окружность называют *основной*, а прямую – *производящей*. По определению дуга M_0N и прямая MN (рис.19.1) равны, так как прямая перекачивается по окружности без проскальзывания:

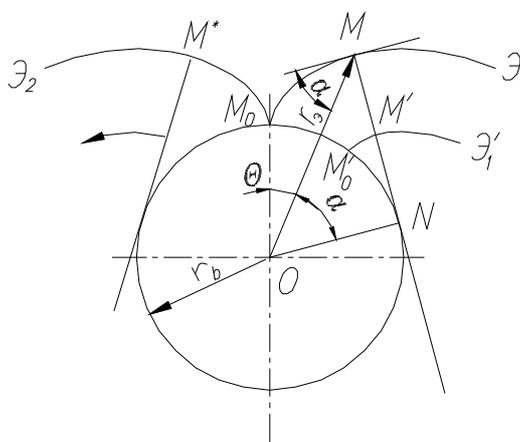


Рис.19.1

$$M_0N = MN \quad (19.1)$$

Дугу M_0N можно выразить через радиус основной окружности r_b (параметрам основной окружности приписывают индексы b) и центральный угол $(\alpha + \theta)$

$$M_0N = r_b (\alpha + \theta),$$

а прямую MN - из прямоугольного треугольника OMN

$$MN = r_b \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя значения M_0N и MN в (19.1), получают следующее равенство:

$$\theta = \operatorname{tg}\alpha - \alpha. \quad (19.2)$$

Угол θ называют эвольвентной функцией, инволютным углом (или просто инволютой) и часто обозначают $\operatorname{inv}\alpha$. Эта функция играет большую роль в теории зубчатого зацепления, поэтому она табулирована (см., например, [2]); угол α называют углом профиля.

Зависимость для текущего радиуса-вектора r_3 получают из $\triangle OMN$:

$$r_3 = r_b / \cos\alpha. \quad (19.3)$$

Совокупность зависимостей (19.2) и (19.3) представляет собой уравнение эвольвенты в параметрической форме (параметром является угол α). Отметим наиболее важные свойства эвольвенты:

1) очертание эвольвенты зависит только от радиуса r_b , следовательно, эвольвенты, построенные с помощью одинаковых основных окружностей, при наложении совпадают; при $r_b \rightarrow \infty$ эвольвента вырождается в прямую (это свойство используется при образовании реечной передачи, нарезании зубьев инструментальной рейкой и т.п.);

2) эвольвента является симметричной кривой (при качении производящей прямой в разные стороны относительно основной окружности), имеющей две ветви \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , сходящиеся в точке M_0 (рис.19.1). Эти ветви используют для профилей обеих сторон зубьев (рис.19.2);

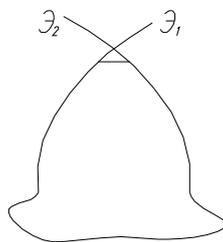


Рис.19.2

3) производящая прямая (рис.19.1) является нормалью в точке M к эвольвенте; точка N – центр, а отрезок MN – радиус ее кривизны. Это свойство используют в геометрических и прочностных расчетах;

4) эвольвента является спиралью и существует только за пределами основной окружности. По мере удаления от основной окружности радиусы кривизны эвольвенты увеличиваются. Это свойство используют, в частности, при нарезании колес со смещением (см. ниже) для получения более высоких показателей прочности зубьев;

5) эвольвенты \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}'_1 (рис.19.1) являются эквидистантными (равноотстоящими) кривыми; при этом $M_0M'_0 = MM'$ (по определению эвольвенты). Это свойство используется при доказательстве равенства окружных шагов для зубьев сопряженных колес и т.п.

19.2. Элементы и свойства эвольвентного зацепления

Основные вопросы теории зубчатого зацепления обычно рассматривают применительно к прямозубой цилиндрической передаче, а затем оговаривают особенности других видов зубчатых механизмов. Последуем и здесь этому правилу.

На рис.19.3 показаны две основные окружности с диаметрами d_{b1} и d_{b2} , вращающиеся относительно своих центров O_1 и O_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Проведем к этим окружностям общую касательную, которая по свойству эвольвенты является производящей прямой. Каждая точка этой прямой описывает эвольвенту, например, эвольвенты в точках K , K' и K^* .

Можно видеть, что в пределах отрезка N_1N_2 геометрическое условие касания профилей выполняется (сопряженные эвольвенты в точках K и K' имеют общую нормаль), а за пределами отрезка N_1N_2 не выполняется (эвольвенты \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 в точке K^* общей нормали не имеют). Отрезок N_1N_2 называют *линией зацепления*.

Высоту зуба на колесах ограничивают окружностями *вершин* (на рис.19.3 диаметры этих окружностей обозначены d_{a1} и d_{a2}) таким образом, чтобы они пересекались с производящей прямой внутри отрезка N_1N_2 , например в точках B_1 B_2 . Отсюда зубья соприкасаются не на всей линии зацепления N_1N_2 , а только на ее участке B_1B_2 , который называют *рабочим участком линии зацепления*.

Полус зацепления P находится на пересечении линии зацепления N_1N_2 (общей нормали к эвольвентным профилям зубьев) с линией центров O_1O_2 . Окружности, проходящие через полюс P , являются начальными (полоидными). На рис.19.3 диаметры этих окружностей обозначены d_{w1} и d_{w2} , полюс расположен между центрами вращения O_1 и O_2 , поэтому рассматриваемая передача выполнена с внешним зацеплением зубьев.

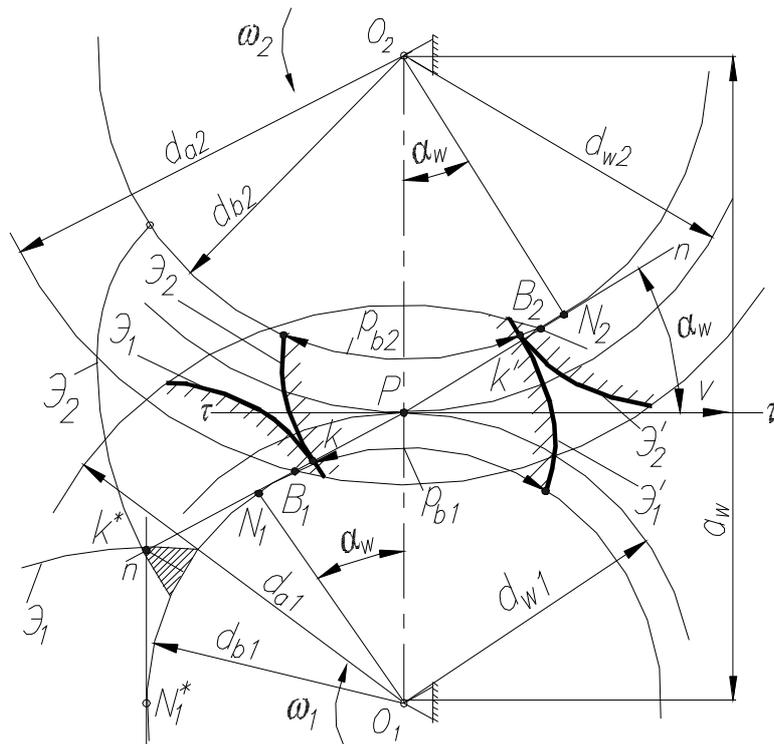


Рис.19.3

Линейная скорость на начальных окружностях, направленная по касательной τ – τ к ним в полюсе P , равна

$$v_1 = v_2 = \omega_1 \frac{d_{w1}}{2} = \omega_2 \frac{d_{w2}}{2}. \quad (19.4)$$

Угол α между общей нормалью и направлением скорости ведомого звена в общем случае называют *углом давления*. В теории зубчатых передач этот угол называют *углом зацепления*. Углу α приписывают индекс той окружности, к кото-

рой он относится. Так, на рис.19.3 угол зацепления соответствует начальным окружностям, поэтому он обозначен α_w . Углы между линией центра и лучами O_1N_1 и O_2N_2 также равны α_w .

Из подобия треугольников O_1N_1P и O_2N_2P следует

$$\frac{d_{b2}}{d_{b1}} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = i_{12}. \quad (19.5)$$

Из выражения (19.5) вытекает одно из важных свойств эвольвентного зацепления: при изменении межосевого расстояния a_w (например, в результате неточностей изготовления и монтажа) передаточное отношение остается постоянным, так как диаметры основных окружностей неизменные. Отметим, что при увеличении межосевого расстояния a_w угол зацепления α_w также увеличивается.

На рис.19.3 в пределах линии зацепления показаны две пары сопряженных зубьев, профилями которых служат эвольвенты \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}'_1 для одного колеса и эвольвенты \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}'_2 - для другого. Расстояние по дуге какой-либо окружности между одинаковыми профилями двух соседних зубьев называют окружным *шагом* и обозначают p_t , приписывая ему индексы той окружности, по которой шаг измеряется. Например, по основной окружности шаг обозначают p_b ; для прямозубых колес индекс t опускается.

Шаги по одинаковым окружностям сопряженных колес должны быть одинаковыми. Это нетрудно установить по рис.19.3: шаги p_{b1} и p_{b2} порознь равны отрезку KK' на линии зацепления по свойству эвольвенты, отсюда $p_{b1} = p_{b2}$.

Шаг выбирают таким, чтобы обеспечивалась непрерывность передачи движения от шестерни к колесу при переходе контакта от одной пары зубьев к другой. При этом шестерней называют меньшее из пары колес, обычно ведущее. Ему приписывают индекс 1, а большему из колес приписывают индекс 2 и называют его колесом. Термин "колесо" является общим для обоих звеньев.

Количественной мерой непрерывности зацепления служит отношение ϵ длины рабочего участка линии зацепления к шагу по основной окружности

$$e = \frac{B_1 B_2}{p_b}, \quad (19.6)$$

называемое коэффициентом перекрытия. Для гарантирования непрерывности передачи движения коэффициент перекрытия принимают $\epsilon > 1,2$.

19.3. Геометрические параметры колеса с внешними зубьями

Такие параметры зубчатого колеса, как диаметры начальной d_w , основной d_b окружностей и окружности вершин зубьев d_a , окружной шаг p_b , угол зацепления α , который применительно к профилю зуба называют углом профиля, описаны ранее и показаны на рис.19.4. Назовем некоторые другие параметры колеса.

1. Каждое колесо имеет определенное число зубьев, обозначаемое z . Число зубьев на шестерне обозначают z_1 , а на колесе - z_2 . При увеличении числа зубьев до бесконечности колесо превращается в рейку, а эвольвентный профиль зуба становится прямолинейным; для рейки вместо числа зубьев указывают ее длину l .

2. Зуб по высоте сверху ограничен окружностью вершин, а снизу – *окружностью впадин*. Диаметр окружности впадин обозначают d_f .

3. Одним из основных параметров зубчатого колеса является *делительная окружность*, которая делит зуб по высоте на делительные *головку* и *ножку* (рис.19.4). Диаметр делительной окружности обозначают d без индекса, другие параметры (α , p и т.д.), относящиеся к этой окружности, также обозначают без индексов.

Длину делительной окружности можно выразить двояким способом – через диаметр и через шаг и число зубьев $\pi d = zp$, откуда

$$d = z \frac{p}{\pi} = zm, \quad (19.7)$$

где m – *модуль зацепления*, равный

$$m = \frac{p}{\pi}. \quad (19.8)$$

4. *Модуль зацепления m* является основной характеристикой зубчатого колеса. Через модуль выражены практически все параметры зубчатой передачи. Величина модуля стандартизована, например, для зубчатых колес выдержка из 1-го ряда по ГОСТ

9563-60 дает следующие значения модуля: $m = \{ \dots 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,25; 1,5; 2,0, \dots \}$ мм

Модуль, как и шаг, различен в зависимости от того, к какой окружности он относится. Стандартное значение модуля соответствует делительной окружности колеса, поэтому последнюю еще называют *окружностью стандартного модуля*.

5. Высоту головки h_a и ножки h_f зуба выражают через модуль и коэффициенты:

$$h_a = mh_a^*$$

$$\text{и} \quad h_f = m(h_a^* + c^*), \quad (19.9)$$

где h_a^* - коэффициент высоты головки зуба, его стандартное значение

$h_a^* = 1,0$; c^* - коэффициент радиального зазора, для цилиндрических

передач его значения установлены стандартом в зависимости от величины модуля:

$c^* = 0,25$ при $m > 1,0$ мм - крупномодульные передачи;

$c^* = 0,35$ при $1,0 \text{ мм} > m > 0,5 \text{ мм}$ мелкомодульные

$c^* = 0,5$ при $1,0 \text{ мм} \geq m > 0,1 \text{ мм}$ передачи

6. Высота зуба h равна

$$h = h_a + h_f = m(2h_a^* + c^*). \quad (19.10)$$

7. Формулы для диаметров окружностей основной d_b , вершин зубьев d_a и впадин зубьев d_f можно записать в следующем виде (рис.19.4):

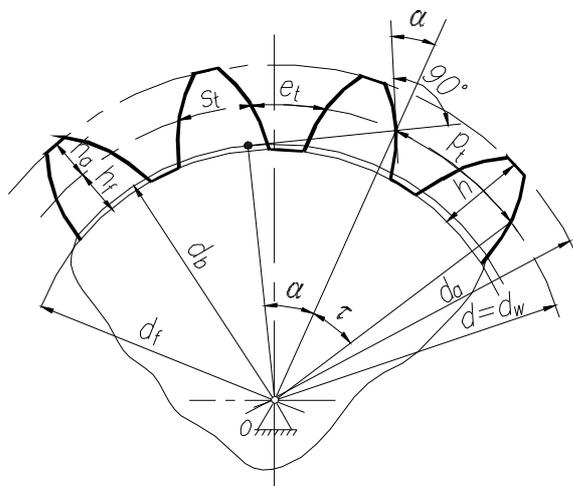


Рис.19.4

$$d_b = d \cos \alpha = mz \cos \alpha;$$

$$d_a = d \pm 2h_a = m(z \pm 2h_a^*); \quad (19.11)$$

$$d_f = d \pm 2h_f = m(z \mp 2(h_a^* + c^*));$$

заметим, что формулы для d_a и d_f справедливы только для нулевых колес; верхний знак относится к внешнему, а нижний – к внутреннему зубу.

8. Различают шаги *окружной* p_t и *угловой* τ (рис.19.4). Окружной шаг p_t состоит из *толщины* зуба s_t и *ширины впадины* e_t :

$$p_t = s_t + e_t. \quad (19.12)$$

По делительной окружности для нулевых колес толщина зуба равна ширине впадины

$$s = e = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2}; \quad (19.13)$$

в общем случае могут применять *колеса со смещением*, у которых $s \neq e$.

9. Относительно понятий "колеса нулевые" и "колеса со смещением" ограничимся следующим пояснением. Эти термины связаны с изготовлением зубчатых колес, поэтому рассмотрим некоторые вопросы образования зубьев на колесах.

Эвольвентные зубья на колесах производят с помощью нарезания, штамповки или накатки специальным инструментом, а также литьем и прессованием. Наиболее употребительным является нарезание зубьев на специальных зуборезных станках.

Различают два основных метода нарезания зубьев: метод копирования, при котором копируется форма профиля инструмента или шаблона, и метод обкатки (огибания) инструмента относительно колеса.

При использовании метода копирования зубья нарезают дисковыми или пальцевыми модульными фрезами. Профиль этих фрез имеет очертание впадины между зубьями. Фреза совершает при нарезании два движения – вращательное относительно собственной оси и поступательное вдоль оси заготовки, прорезая таким образом впадину за один проход. Затем заготовку поворачивают на угловой шаг $\tau = 2\pi/z$, фрезу возвращают в исходное положение и прорезают следующую впадину и т.д.

Метод копирования, требующий большого числа модульных фрез, малопродуктивен, обладает малой точностью, поэтому его применяют преимущественно в ремонтном деле. Отметим, что к методу копирования относят изготовление колес с

помощью штамповки, протягивания, прессования и литья – эти способы при массовом производстве колес могут быть весьма производительными.

Более универсальным и распространенным является метод обкатки. Заключается он в следующем. Заготовке колеса и режущему инструменту, имеющему форму зубчатого колеса или зубчатой рейки, сообщают такое относительное движение, какое они имели бы, если бы заготовка была уже нарезанным колесом; при этом инструмент еще совершает поступательное перемещение вдоль оси заготовки, совершая рабочее движение резания.

Инструмент-колесо называют долбяком, а инструмент-рейку – инструментальной рейкой (или гребенкой); последняя может быть выполнена в виде червячной фрезы, профиль которой в осевом сечении представляет собой инструментальную рейку.

За основу зуборезного инструмента принят исходный контур (рис.19.5), являющийся контуром инструментальной (производящей) рейки, следующие параметры которой стандартизованы: модуль m , коэффициенты высоты головки зуба h_a^* и радиального зазора c^* , угол профиля α . Прямую, по которой толщина зуба контура равна ширине впадины, называют *делительной*.

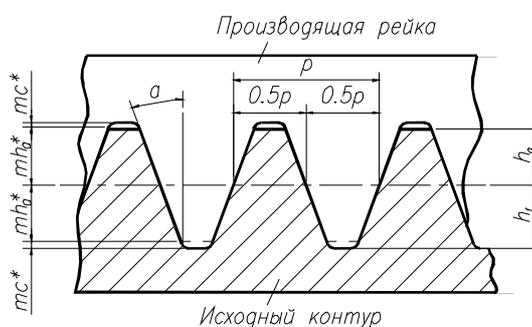


Рис.19.5

При формировании зубьев на колесе делительная прямая инструментальной рейки может касаться делительной окружности нарезаемого колеса или быть смещенной относительно этой окружности. Смещение характеризуется параметром $x \cdot m$, где x – коэффициент смещения.

В зависимости от значения x различают три варианта нарезания колеса. Так, при $x = 0$ делительная прямая и делительная окружность касаются, в этом случае колеса называют нулевыми. Если делительная прямая отстоит от делительной ок-

ружности на расстоянии xt и $x > 0$, то такие колеса называют нарезанными с положительным смещением. При $x < 0$ делительная прямая пересекает делительную окружность, и колеса называют нарезанными с отрицательным смещением.

Смещение инструмента при формировании зубьев вызывается различными причинами. Одной из причин является *подрез* ножки зуба, в результате которого могут ухудшаться свойства передачи (прочность, плавность, КПД). Подрез зубьев появляется при малом числе зубьев на колесе. Не вдаваясь в подробное изучение вопросов, связанных с подрезанием зубьев, запишем в готовом виде формулы для *минимального числа зубьев* z_{\min} и минимального коэффициента смещения x_{\min} прямозубого цилиндрического колеса, при которых еще нет подреза зубьев:

$$z_{\min} = \frac{2h_a^*}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 1,0}{\sin^2 20^\circ} \cong 17; \quad (19.14)$$

$$x_{\min} = h_a^* \frac{z_{\min} - z}{z_{\min}}, \quad (19.15)$$

где $\alpha = 20^\circ$ и $h_a^* = 1,0$ - стандартные значения параметров профиля зуба инструмента.

Для колес со смещением величин диаметров вершин d_a , впадин d_f высоты зуба h и его толщины s будут отличными, чем у нулевых колес. Эти параметры могут быть определены по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} d_a &= m (z \pm 2 (h_a^* + x - \Delta y)); \\ d_f &= m (z \mp 2 (h_a^* + c^* - x)); \\ h &= m (2h_a^* + c^* - \Delta y); \\ s &= m \left(\frac{p}{2} + 2xtga \right), \end{aligned} \right| \quad (19.16)$$

где Δy – коэффициент уравнительного смещения. Значение x в этих формулах следует подставлять с учетом его знака: верхний знак для внешнего зуба, а нижний – для внутреннего.

10. Реальные колеса имеют определенный размер зубьев вдоль оси вращения колеса, который называют *шириной* зубчатого венца, или шириной колеса и обозначают как b (рис.19.6). Под понятием "зубчатый венец" следует понимать собственно зубья и прилегающую к ним часть тела колеса, толщиной в 1,5 ... 2,0 раза большей высоты зуба.

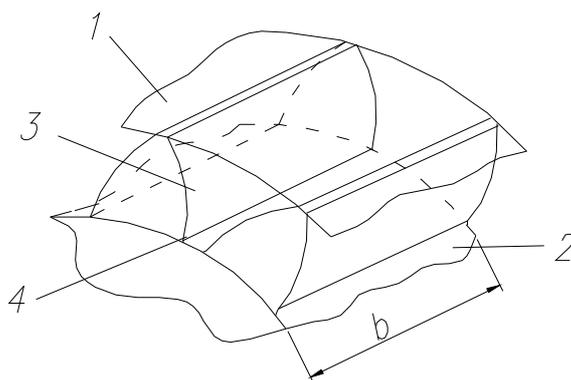


Рис.19.6

В зацеплении участвуют поверхности зубьев, поэтому контакту плоских профилей в точке соответствует касание поверхностей по линии. Окружность вершин зубьев – *поверхность вершин 1* (рис.19.6), а окружность впадин – *поверхность впадин 2*. Поверхность, ограничивающую зуб со стороны впадины, называют *боковой поверхностью* зуба, состоящей из *главной 3* эвольвентной и *переходной 4* неэвольвентной поверхностей. Переходная поверхность соединяет главную поверхность с поверхностью впадин.

19.4. Элементы эвольвентной зубчатой передачи

На рис.19.7 показана эвольвентная зубчатая передача внешнего зацепления.

При заданном направлении угловых скоростей ω_1 и ω_2 зубья воспринимают усилие одной стороной, называемой *рабочей стороной* зуба. В зацеплении участвуют активные профили зубьев (на рис.19.7 эти профили показаны двойными кривыми), которые соответствуют активному участку B_1B_2 линии зацепления (на рис.19.7 точки B_1 и B_2 отнесены на соответствующие профили зубьев пунктирными окружностями).

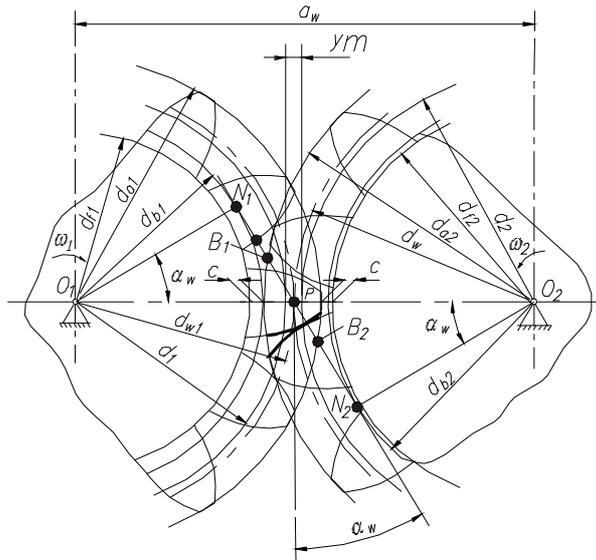


Рис.19.7

Между окружностью вершин одного колеса и окружностью впадин другого колеса устанавливают *радиальный зазор* c (для компенсации возможных погрешностей изготовления и сборки, удержания смазки и т.д.):

$$c = c^* m. \quad (19.17)$$

Межосевое расстояние a_w зубчатой передачи:

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = \frac{d_1 + d_2}{2} + ym, \quad (19.18)$$

где ym – воспринимаемое смещение, а y – коэффициент воспринимаемого смещения.

Для передач с нулевыми колесами $y = 0$, следовательно, $d = d_w$ и

$$a_w = a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{d_1(u + 1)}{2}, \quad (19.19)$$

где u – передаточное число,

$$u = d_2/d_1. \quad (19.20)$$

В дальнейшем будем рассматривать только зубчатые передачи с нулевыми колесами как наиболее употребительными. Для внешнего и внутреннего зацепления расчетные формулы (19.19) и (19.20) можно записать:

$$a = \frac{d_2 \pm d_1}{2} = \frac{m(z_2 \pm z_1)}{2} = \frac{d_1(u \pm 1)}{2}; \quad (19.21)$$

$$u = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (19.22)$$

19.5. Особенности геометрии косозубых цилиндрических передач

Косозубые цилиндрические колеса в отличие от прямозубых имеют зубья, расположенные под углом β_b к оси основного цилиндра (рис.19.8), причем углы наклона зуба неодинаковы на разных диаметрах колеса, например, на делительном цилиндре - β . На рис.19.8,а показано образование боковых поверхностей прямого и непрямого зубьев при перекачивании без скольжения производящей плоскости 1 по основному цилиндру 2. Для случая, когда прямая MM в производящей плоскости параллельна образующей NN основного цилиндра, траектории множества точек этой прямой описывают в совокупности боковую поверхность 3 прямого зуба, а когда прямая LL расположена под углом β_b , - боковую поверхность 4 непрямого зуба косозубого колеса; последняя является эвольвентной винтовой поверхностью.

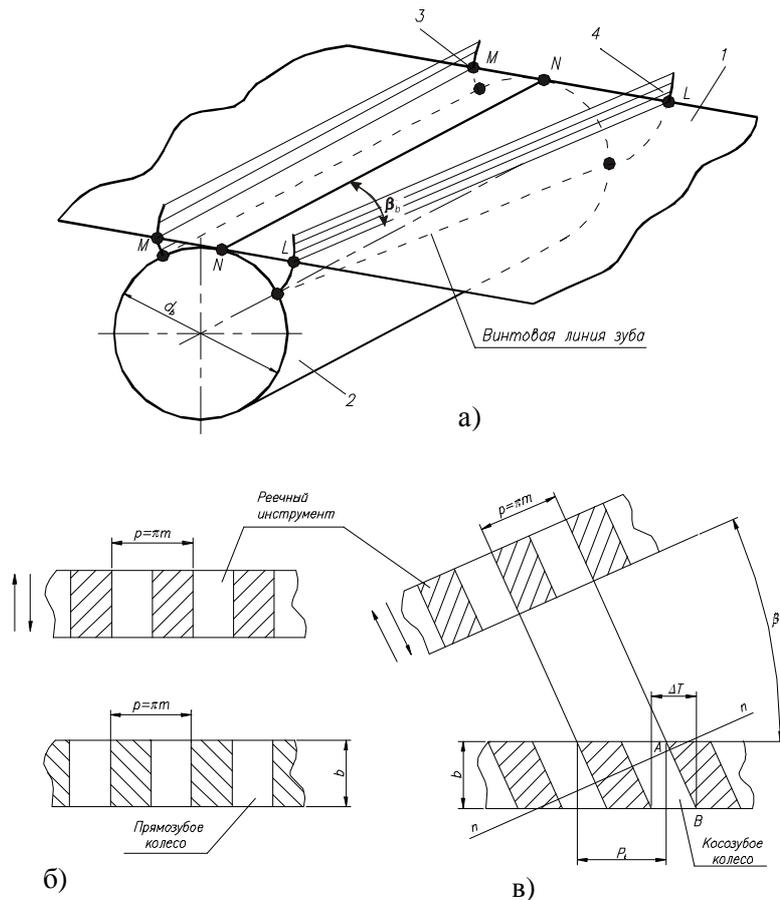


Рис.19.8

Общим в образовании поверхностей прямого и непрямого зубьев является: а) обе поверхности линейчатые, что обеспечивает при зацеплении зубьев в передаче линейчатый контакт; б) в торцевых, перпендикулярных оси основного цилиндра сечениях прямозубого и косозубого колес профили зубьев очерчены эвольвентой. Эти свойства позволяют распространять основные положения теории зубчатого зацепления и на косозубые цилиндрические передачи с учетом некоторых особенностей, вызванных в основном технологией изготовления колес.

Колеса прямозубые и косозубые получают с помощью одинакового инструмента. На рис.19.8,б и в показано нарезание зубьев реечным инструментом на прямозубом (рис.19.8,б) и косозубом (рис.19.8,в) колесах.

Видно, что косозубое колесо нарезается тем же инструментом, что и прямозубое, но повернутым на угол β к заготовке. В связи с этим в косозубом колесе различают *нормальное* и *торцевое сечения*. В нормальном сечении (сечение по нормали $n - n$ к зубу, см. рис.19.8,в) косозубого колеса шаг p и модуль m по делительной окружности такие же, как и у прямозубого в торцевом сечении на этой же окружности. Для косозубого колеса эти шаг и модуль называют *нормальными* и обозначают, приписывая индексы $n - p_n$ и m_n .

В торцевом сечении косозубого колеса шаг p_t и модуль m_t отличаются от соответствующих параметров в нормальном сечении и равны (см. рис.19.8,в):

$$\begin{aligned} p_t &= p_n / \cos \beta; \\ m_t &= m_n / \cos \beta. \end{aligned} \quad (19.23)$$

В косозубой передаче зубья входят в зацепление не сразу по всей длине, а постепенно (см. рис.19.8,в), сначала в точке А до полного зацепления, соответствующего точке В. В связи с этим в косозубой передаче различают не только коэффициент перекрытия ϵ_α (см. (19.10)), который называют *торцевым*, но также и *осевой* ϵ_β коэффициент, равный

$$\epsilon_\beta = \frac{\Delta T}{P_b} = \frac{btg\beta}{P_b}. \quad (19.24)$$

Общий коэффициент перекрытия ε_γ определится как

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \quad (19.25)$$

Из формулы (19.25) видно, что коэффициент перекрытия косозубых передач может быть значительно больше, чем прямозубых. Следовательно, косозубые колеса работают более плавно и обладают большей нагрузочной способностью.

Основные формулы для диаметров цилиндров делительного, вершин и впадин косозубого нулевого колеса имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d &= m_t z = m_n z / \cos \beta; \\ d_a &= d \pm 2h_a = m_t z \pm 2m_n h_a^*; \\ d_f &= d - 2h_f = m_t z - 2m_n (h_a^* + c^*); \end{aligned} \right\} \quad (19.26)$$

межосевое расстояние

$$a = \frac{d_2 \pm d_1}{2} = \frac{m_t (z_2 \pm z_1)}{2} = \frac{d_1 (u \pm 1)}{2} = \frac{m_n (z_2 \pm z_1)}{2 \cos \beta}; \quad (19.27)$$

в этих формулах верхние знаки принимают для расчета параметров колес с внешними зубьями, а нижние знаки – колес с внутренними зубьями.

В косозубых передачах различают также параметры *эквивалентного* колеса – диаметр и число зубьев. Нормальное к зубу сечение на делительном цилиндре колеса (рис.19.9) образует эллипс с полуосями

$d/(2\cos\beta)$ и $d/2$. Максимальный радиус кривизны эллипса равен

$$r_{\text{эл.мах}} = \left(\frac{d}{2 \cos \beta} \right)^2 / \left(\frac{d}{2} \right) = d / (2 \cos^2 \beta).$$

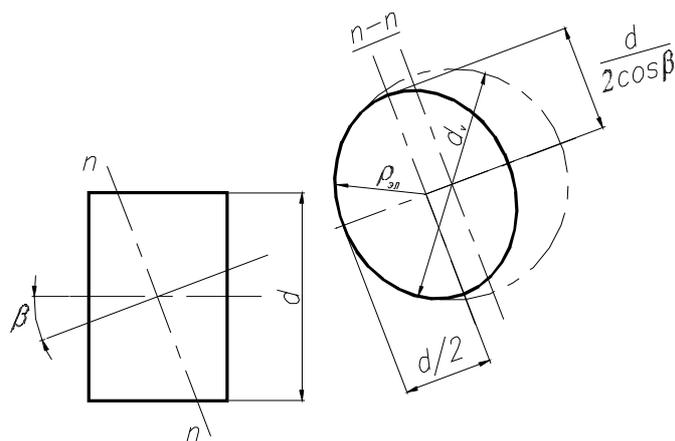


Рис.19.9

Радиус эквивалентного колеса приравнивают максимальному радиусу $r_{эл}$, следовательно, диаметр эквивалентного колеса равен

$$d_v = 2r_{эл.макс} = d / \cos^2 \beta . \quad (19.28)$$

Число зубьев z_v эквивалентного колеса может быть найдено из очевидного равенства

$$d_v = m_n z_v = \frac{d}{\cos^2 \beta} = \frac{m_n z}{\cos^2 \beta} ,$$

откуда

$$z_v = z / \cos^2 \beta . \quad (19.29)$$

Увеличение параметров эквивалентного колеса d_v и z_v с ростом угла β является одной из причин повышения прочности косозубых передач и плавности их работы. Однако величину угла наклона зубьев из-за сложности изготовления и появления больших осевых сил (см. ниже) ограничивают значением $\beta \leq 25^\circ$, наиболее употребительные значения $\beta = 8^\circ \dots 16^\circ$.

19.6. Геометрия и кинематика конических зубчатых передач

Передачу с зубчатыми коническими колесами можно представить в виде двух *начальных конусов*, катящихся друг по другу без скольжения (рис.19.10). Угол между пересекающимися осями конусов обозначают Σ , а углы при вершинах конусов - δ_1 и δ_2 , при этом

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2. \quad (19.30)$$

Наиболее распространены конические зубчатые передачи с углом $\Sigma = 90^\circ$. Передаточное отношение для конической передачи в соответствии с теоремой о мгновенном передаточном отношении можно представить в следующем виде (см. рис.19.10):

$$i_{12} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{OP \sin \delta_2}{OP \sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (19.31)$$

При $\Sigma = 90^\circ$ передаточное число равно

$$u = \frac{\sin \delta_2}{\cos \delta_2} = \operatorname{tg} \delta_2, \text{ или } \delta_2 = \operatorname{arctg} u. \quad (19.32)$$

Через числа зубьев z_1 и z_2 передаточное число определяют по формуле (19.22).

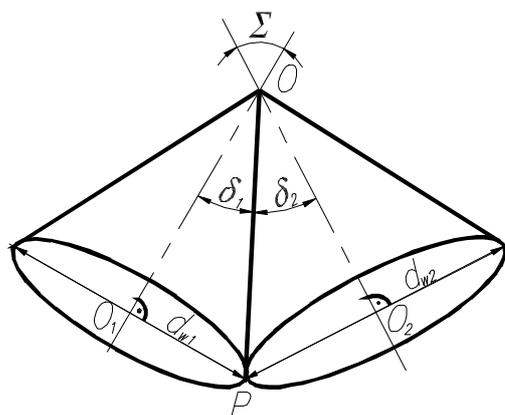


Рис.19.10

Конические колеса могут иметь прямые и не прямые зубья. Рассмотрим здесь только геометрию нулевых прямозубых конических передач. Боковая поверхность прямого зуба конического колеса образуется (рис.19.11,а) прямой MO производя-

щей плоскости при качении ее по основному конусу. Эта поверхность является сферической эвольвентной линейчатой, что позволяет распространить основные положения теории зубчатого зацепления и на конические передачи с учетом некоторых особенностей.

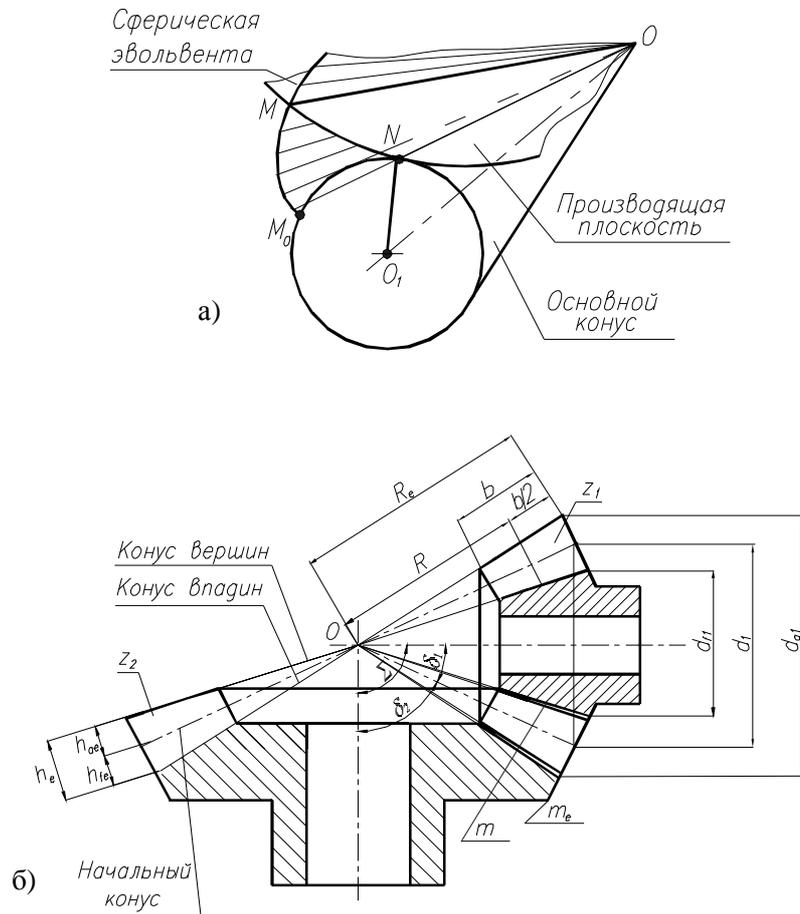


Рис.19.11

В конических передачах различают *делительные конусы* (для нулевых колес они совпадают с начальными конусами), *конусы вершин* (рис.19.11,б) и *конусы впадин*. В качестве основного параметра, определяющего габариты передачи, принято *внешнее конусное расстояние* R_e , устанавливающее координаты *внешнего сечения* (торца) колеса. Для внешнего сечения всем размерам приписывают индекс "e", принимая их стандартными.

Параметры внешнего сечения (см. рис.19.11,б): внешний модуль m_e , высота головки h_{ae} , ножки h_{fe} и зуба h_e ,

$$h_e = h_{ae} + h_{fe} = m_e (2h_a^* + c^*), \quad (19.33)$$

диаметры окружностей делительной d_e , вершин d_{ae} и впадин d_{fe} зубьев,

$$\left. \begin{aligned} d_e &= m_e z, \\ d_{ae} &= d_e + 2h_{ae} = m_e (z + 2h_a^* \cos \delta), \\ d_{fe} &= d_e - 2h_{fe} = m_e (z - 2(h_a^* + c^*) \cos \delta), \end{aligned} \right\} \quad (19.34)$$

где h_a^* и c^* - коэффициенты высоты головки зуба и радиального зазора, стандартные значения которых приняты равными $h_a^* = 1,0$ и $c^* = 0,2$ при $m_e \geq 1$ мм, $c^* = 0,3$ при $1 \text{ мм} > m_e \geq 0,5$ мм, $c^* = 0,45$ при $0,5 \text{ мм} > m_e > 0,1$ мм.

Внешнее конусное расстояние равно

$$R_e = m_e z_1 / (2 \sin \delta_1) = m_e z_2 / (2 \sin \delta_2). \quad (19.35)$$

В качестве *расчетного* сечения принято *среднее* сечение, определяемое координатой R , которую называют *средним* конусным расстоянием (см. рис.19.11,б). Модуль в этом сечении называют *средним* окружным модулем и обозначают m . Диаметр делительной окружности в среднем сечении равен

$$d = mz; \quad (19.36)$$

связь между размерами в сечениях внешнем и среднем линейная, например

$$\left. \begin{aligned} m &= m_e R / R_e, \\ R &= R_e - 0,5b, \end{aligned} \right\} \quad (19.37)$$

где b – длина зуба (ширина колеса).

В расчетной практике пользуются также параметрами эквивалентного колеса. Поскольку сферу нельзя развернуть в плоскость, то участок сферы в области, охватываемой высотой зуба на внешнем торце, заменяют конусом, который называют *дополнительным*, с углом при вершине $90^\circ - \delta$ (рис.19.12). Развертка этого конуса представляет сектор,

дополнение которого до окружности дает эквивалентное колесо. Из треугольника $O'AB$ можно получить выражения для расчета диаметра и числа зубьев эквивалентного колеса:

$$\left. \begin{aligned} d_{ve} &= d_e / \cos \delta; \\ z_v &= z / \cos \delta. \end{aligned} \right\} (19.38)$$

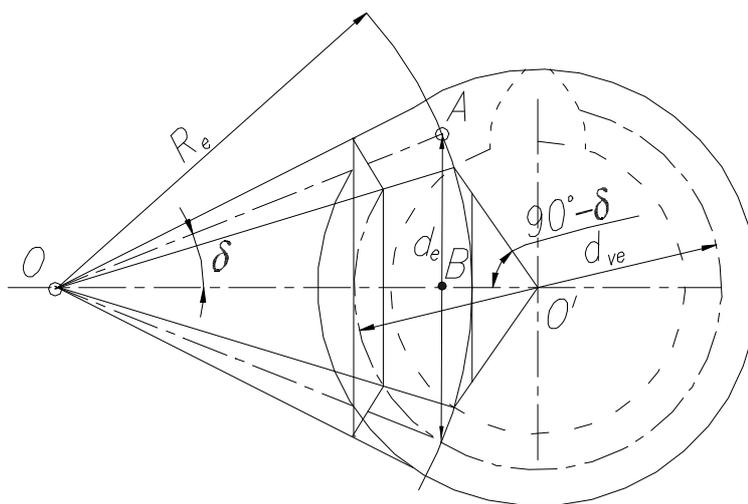


Рис.19.12

19.7. Геометрия и кинематика червячной передачи

Зубчатую передачу со скрещивающимися осями колес можно представить в виде двух гиперboloидов вращения, перекатывающихся друг относительно друга (рис.19.13). Гиперboloидные зубчатые передачи вследствие сложности их изготовления не применяются. На практике используются только приближенные их модификации – винтовые зубчатые передачи (участки в горловине гиперboloидов приближенно заменяют начальными цилиндрами A_B и B_B) и гипоидные зубчатые передачи, образованные в результате замены удаленных от горловины гиперboloидов участков с начальными конусами A_Γ B_Γ .

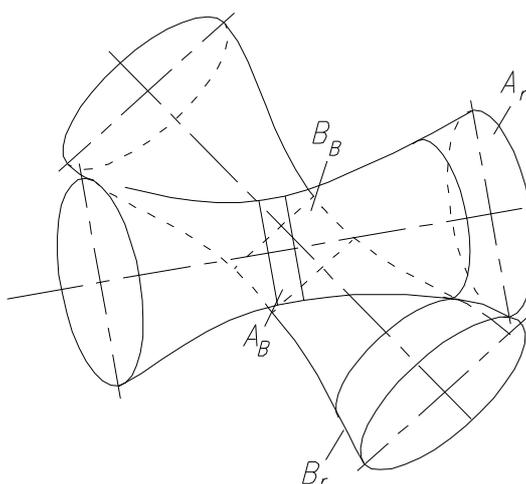


Рис.19.13

При замене гиперболоидных начальных поверхностей цилиндрическими или коническими начальными поверхностями зубья становятся криволинейными, в результате чего линейчатый контакт вырождается в точечный. Это приводит к большим удельным давлениям, которые в сочетании с высокими скоростями скольжения, характерными для таких передач, вызывают дополнительные потери в зацеплении, износ поверхности зубьев и даже их заедание (схватывание материалов поверхностей зубьев, микросварка и т.п.). Поэтому эти механизмы в таком виде используют лишь при малых нагрузках и скоростях; однако разновидности таких передач применяют достаточно широко.

Разновидностью винтового зубчатого механизма является червячная передача, в которой с помощью охватывающей формы зубьев у колеса добиваются линейчатого контакта в зацеплении. Червячная передача состоит из червяка и червячного колеса, угол скрещивания их осей в большинстве случаев равен 90° .

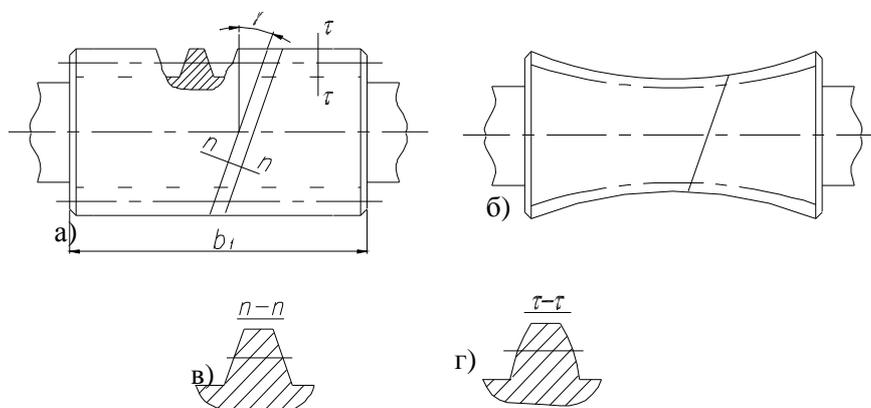


Рис.19.14

Червяки по форме бывают цилиндрическими (рис.19.14,а) и глобоидными (рис.19.14,б). По профилю зубьев различают червяки архимедовы (прямолинейный профиль зуба в осевом сечении червяка, рис.19.14,а и 19.15), конволютные (прямолинейный профиль в нормальном к зубу сечении, рис.19.14,а и в), эвольвентные (эвольвентный профиль зуба в торцевом сечении червяка (рис.19.14,а,г). Выбор профиля зуба червяка определяется технологией изготовления, поскольку на работоспособность передачи профиль зуба червяка влияет мало. В нашей стране наиболее распространены архимедовы червяки. Название "архимедов" червяку дали по той причине, что в его торцевом сечении профиль зуба описывается архимедовой спиралью (рис.19.15). Архимедов червяк (его обозначают ZA) подобен винту с трапецеидальной резьбой. Основные параметры червяка: число заходов $z_1 = 1, 2, 4$ (на схемах количество заходов z_1 обозначают наклонными прямыми, см., например, рис.19.14,а); шаг червяка $p = \pi m$; модуль m , стандартное значение которого принимают для осевого сечения червяка; ход витка $p_n = pz_1$; угол профиля $\alpha = 20^\circ$; высоты головки $h_a = h_a^* m$ и ножки $h_f = m(h_a^* + c^*)$ зуба, стандартные значения h_a^* и c^* приняты такими, как для конических зубчатых колес; диаметры окружностей червяка делительной d_1 ,

$$\text{вершин } d_{a1} \text{ и впадин } d_{f1}: \left. \begin{array}{l} d_1 = mq; \\ d_{a1} = d_1 + 2h_a = m(q + 2h_a^*); \\ d_{f1} = d_1 - 2h_a = m(q - 2(h_a^* + c^*)), \end{array} \right| \quad (19.39)$$

(где q – коэффициент диаметра червяка, величина которого стандартизована и согласуется со значением модуля);

- угол подъема винтовой линии червяка

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{z_1}{q}; \quad (19.40)$$

- длина нарезанной части червяка

$$\left. \begin{array}{l} b_1 \geq m(11 + 0,06 z_2) \text{ при } z_1 = \{1, 2\}; \\ b_1 \geq m(12,5 + 0,09 z_2) \text{ при } z_1 = 4. \end{array} \right| \quad (19.41)$$

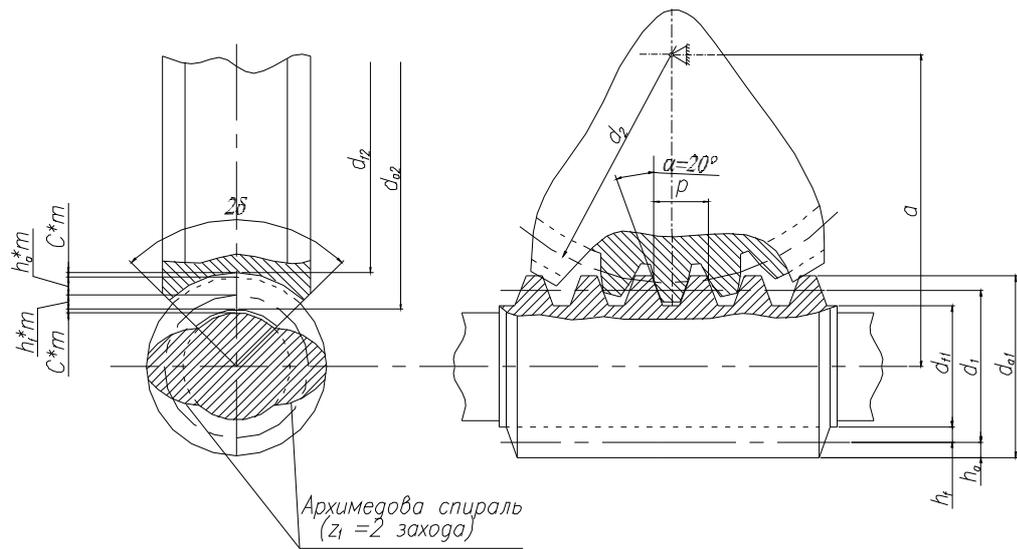


Рис.19.15

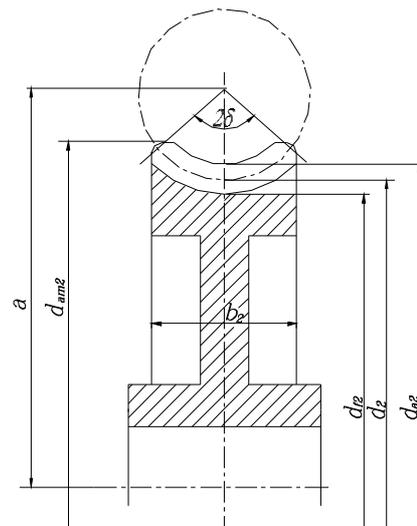


Рис.19.16

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение для эвольвенты, основной окружности и производящей прямой.
2. Назовите пять наиболее важных свойств эвольвенты.
3. Покажите на рис.19.3 линию зацепления и рабочий участок линии зацепления.
4. Найдите на рис.19.3 полюс зацепления, углы зацепления, окружности: начальные, основные, вершин зубьев.
5. Что понимают под коэффициентом перекрытия.
6. Чем характеризуется делительная окружность.
7. Напишите формулы для диаметров окружностей нулевого колеса: делительных, вершин и впадин зубьев.
8. В каком случае для зубчатого колеса совпадают начальная и делительная окружности.
9. Напишите формулы для передаточного числа и межосевого расстояния применительно к прямозубой цилиндрической передаче с нулевыми колесами.
10. Какие сечения, модули и коэффициенты перекрытия различают в косозубой цилиндрической передаче.
11. Напишите формулы для диаметров окружностей косозубой цилиндрической передачи: делительной, вершин и впадин зубьев.
12. Назовите параметры эквивалентного колеса косозубой цилиндрической передачи, напишите для них формулы.
13. В чем состоит особенность расчета передаточного отношения для конических зубчатых передач.
14. Назовите основные геометрические параметры конической зубчатой передачи.
15. Напишите формулы для внешнего и среднего конусных расстояний, диаметров окружностей: делительной, вершин и впадин зубьев.
16. Напишите формулы для параметров эквивалентного колеса конической прямозубой передачи.
17. Какими бывают червяки по форме, а также по профилю зубьев.
18. По какой причине червяку дали название «архимедов».
19. Напишите формулы для диаметров окружностей червяка: делительной, вершин и впадин зубьев.
20. Напишите формулы для диаметров окружностей червячного колеса: делительной, вершин и впадин зубьев.
21. Напишите основные зависимости для параметров червячной передачи: межосевого расстояния, передаточного числа, коэффициента полезного действия.
22. Назовите основные достоинства и недостатки цилиндрических, конических и червячных передач.

Лекция 20. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

20.1. Усилия в зацеплении зубчатых колес

Усилия в зацеплении определяют по известной величине крутящего момента на ведущем T_1 или ведомом T_2 колесах. Напомним соотношения между крутящими моментами T_1 и T_2 :

$$T_2 = T_1 i \eta, \quad (20.1)$$

или

$$T_1 = T_2 / (i \eta),$$

где η - КПД передачи, величину которого для зубчатых передач при проектных расчетах можно принимать равной: для цилиндрических передач $\eta = 0,95 \dots 0,99$, для конических передач $\eta = 0,94 \dots 0,98$, для червячных передач - см. § 17.7. Большие значения относятся к закрытым высокоточным передачам, а меньшие - к открытым менее точным передачам.

Покажем, как определяются усилия в зацеплениях для конкретных передач, при этом силы трения будем учитывать с помощью КПД.

Цилиндрическая прямозубая передача. Силы взаимодействия зубьев определяют в полюсе зацепления, причем распределенную по длине зуба нагрузку заменяют равнодействующей силой F_n , действующей по общей нормали к зубьям (рис. 20.1). Силу F_n называют нормальной силой. Для удобства расчетов зубьев, валов и подшипников силу F_n раскладывают на составляющие: окружную силу F_t по общей касательной $\tau - \tau$ и радиальную F_r по радиусу делительной окружности. На рис. 20.1 все силы показаны для зуба колеса 2, силы для зуба шестерни 1 будут равны по модулю этим силам и противоположны им по направлению (в соответствии с законом Ньютона).

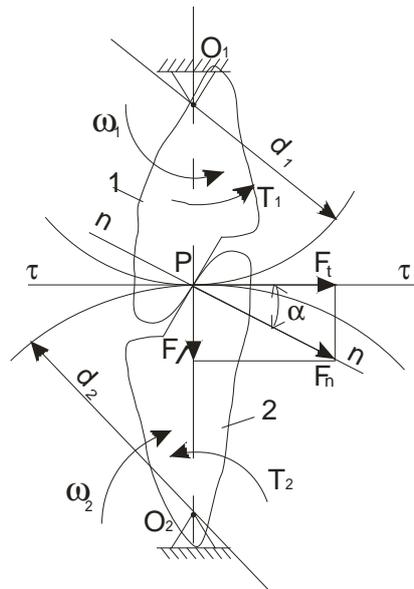


Рис. 20.1

Первым шагом является определение окружной силы

$$F_t = \frac{2T_2}{d_2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T}{d}. \quad (20.2)$$

Силы F_r и F_n находят из треугольника PF_nF_t :

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha; \quad (20.3)$$

$$F_n = F_t / \cos \alpha. \quad (20.4)$$

Цилиндрическая косозубая передача. В косозубой передаче нормальная сила F_n направлена так же, как в прямозубой передаче, по общей нормали к зубьям, но она не параллельна торцевому сечению, а составляет с ним угол β . На рис. 20.2 показана сила F_n для колеса 1, как диагональ параллелепипеда. Ее составляющие равны:

окружная сила (по формуле (20.2))

$$F_t = \frac{2T_2}{d_2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T}{d};$$

радиальная сила

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta; \quad (20.5)$$

осевая сила

$$F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta; \quad (20.6)$$

нормальная сила

$$F_n = F_t / (\cos \alpha \cdot \cos \beta). \quad (20.7)$$

Как видно, в косозубой передаче появляется осевая составляющая F_a , называемая осевой силой. Эта сила дополнительно нагружает валы и опоры передачи, что является одним из основных недостатков косозубой передачи.

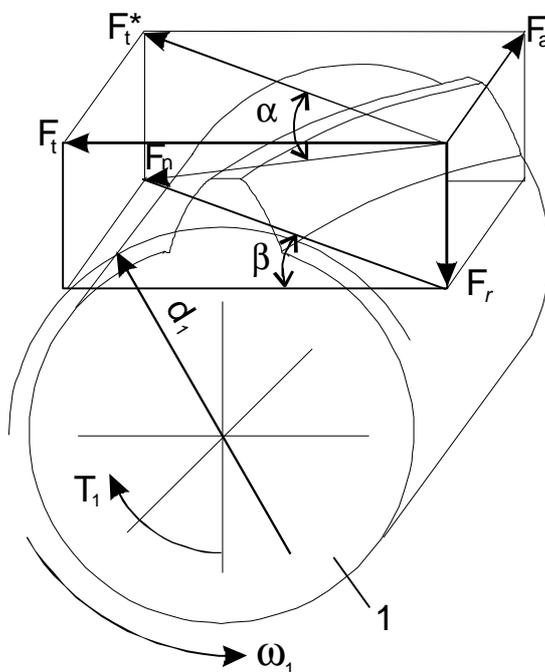


Рис. 20.2

Коническая прямозубая передача. В зацеплении этой передачи действуют силы: нормальная F_n , окружная F_t , радиальная F_r и осевая F_a . Зависимость между указанными силами можно установить с помощью рис.20.3 (на рис.20.3,б силы условно смещены относительно полюса P), где окружная сила

$$F_t = \frac{2T_2}{d_2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T}{d}; \quad (20.8)$$

радиальная сила на шестерне, равная осевой силе на колесе

$$F_{r1} = F_{a2} = F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_2; \quad (20.9)$$

осевая сила на шестерне, равная радиальной силе на колесе

$$F_{a1} = F_{r2} = F_t \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_2; \quad (20.10)$$

нормальная сила (по формуле (20.4))

$$F_n = F_t / \cos \alpha.$$

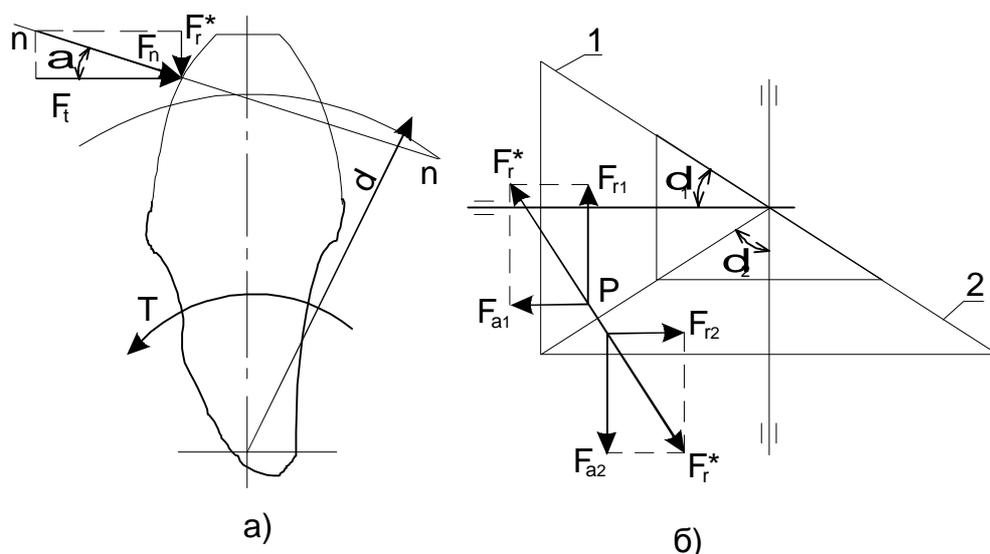


Рис. 20.3

Червячная передача. На зубе червячного колеса нормальная сила F_n так же, как и на зубе косозубого цилиндрического колеса (см. рис.20.2), может быть разложена на три составляющие: окружную силу, радиальную и осевую. Эти силы показаны на рис.20.4 (для наглядности силы немного смещены относительно полюса):

окружная сила на колесе F_{t2} , равная осевой силе на червяке F_{a1}

$$F_{t2} = F_{a1} = 2T_2 / d_2; \quad (20.11)$$

радиальная сила на колесе F_{r2} и червяке F_{r1} (см. формулу (20.5))

$$F_{r2} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha / \cos \gamma = F_{r1}; \quad (20.12)$$

осевая сила на колесе F_{a2} , равная окружной силе на червяке F_{t1}

$$F_{a2} = F_{t2} \operatorname{tg} \gamma = F_{t1} = 2T_1 / d_1; \quad (20.13)$$

нормальная сила в зацеплении (см. формулу (20.7))

$$F_n = F_{t2} / (\cos \alpha \cos \gamma). \quad (20.14)$$

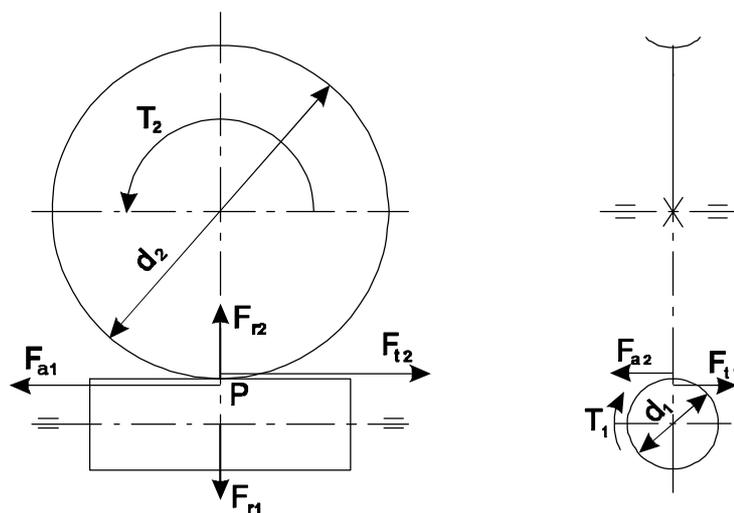


Рис. 20.4

20.2. Материалы. Выбор допускаемых напряжений

В качестве материалов для зубчатых колес и червяков преимущественно используют углеродистые и легированные стали, например, сталь 40, 45, 50, 40Х, 40ХН и др. Применяют также малоуглеродистые, в том числе легированные стали (сталь 20, 20Х, 12ХН3А и др.), чугуны (серые чугуны СЧ 21-40, СЧ 23-44, модифицированные чугуны СЧ 28-48, СЧ 32-52 и др.), пластмассы (текстолит, полиамиды и др.).

Для повышения качества материалов применяют термическую обработку для колес (зубьев). Наиболее распространенными видами термообработки являются нормализация и улучшение, выравнивающие структуру в материале зубьев при твердости $HV \leq 350$. Такая твердость позволяет производить чистовое нарезание зубьев без дорогостоящих доводочных операций.

Применяют также объемную и поверхностную закалку, цементацию и другие виды термообработки. Основной их недостаток – коробление зубьев, необходимость последующих отделочных операций и др.

Некоторые свойства стали 45 и виды ее термообработки приведены в табл. 20.1.

Свойства и термообработка стали

Условное сечение s , мм	Механические свойства				Термообработка
	Твердость		$\sigma_{вр}$, МПа	σ_T , МПа	
	HB	HRC			
100	167...217	-	590	300	Нормализация
60	223...285	-	830	540	Улучшение
30	-	51...57	1000	800	Закалка

Примечания. Для вала-шестерни $s \cong d_1$, для колеса $s \cong 0,5 b$.

$\sigma_{вр}$ и σ_T – пределы прочности и текучести.

Для венцов червячных колес используют бронзы: для среднескоростных (скорость скольжения $v_{ск} = 2...5$ м/с) – алюминиево-железистые Бр.АЖ9-4, для высокоскоростных ($v_{ск} = 5...25$ м/с) – оловянистые Бр.ОНФ, Бр.ОФ10-1; при малых скоростях скольжения ($v_{ск} < 1,5...2$ м/с) можно применять чугуны СЧ 15-32, СЧ 18-36 и др.

При расчете прочности зубчатых передач необходимы данные о допускаемых напряжениях, которые определяются по следующей методике.

1. Допускаемые *контактные* напряжения для зубьев стальных колес и червяков находят по формуле

$$\sigma_{HP} = \sigma_{Hlimb}/s_H, \quad (20.15)$$

где σ_{Hlimb} – предел контактной выносливости материала при базовом числе циклов; s_H – коэффициент безопасности, величину которого принимают равной 1,1 ... 1,2.

Значение σ_{Hlimb} определяют по эмпирическим формулам, например, для улучшенных и нормализованных колес формула имеет вид:

$$\sigma_{Hlimb} = 2HB + 70, \text{ МПа.} \quad (20.16)$$

Следует отметить, что для лучшей приработки колес твердость зубьев шестерни HB_1 для прямозубых передач должна быть на 20...50 HB больше, чем твердость зубьев колеса HB_2 , а для косозубых передач нужно выдерживать неравенство $HB_1 - HB_2 > 70$.

2. Допускаемые *изгибные* напряжения для зубьев стальных колес и червяков определяют по формуле

$$\sigma_{FP} = \sigma_{Flimb} \cdot K_{FC} / S_F, \quad (20.17)$$

где σ_{Flimb} – предел выносливости материала по излому при базовом числе циклов; S_F – коэффициент безопасности, величину которого принимают равной 1,7...2,2; K_{FC} – коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки к зубу; $K_{FC} = 1...0,7$, меньшие его значения применяют для реверсивных передач.

Величину σ_{Flimb} определяют по эмпирическим формулам, например, для нормализованных и улучшенных колес формула следующая:

$$\sigma_{Flimb} = HB + 260, \text{ МПа.} \quad (20.18)$$

3. Допускаемые *контактные* σ_{HP} и *изгибные* σ_{FP} напряжения для зубьев червячных колес выбирают по таблицам в зависимости от материалов, способа отливки и скорости скольжения. Некоторые данные для выбора σ_{HP} и σ_{FP} приведены в табл.20.2.

Таблица 20.2

Свойства материалов для червячных колес

Материал венца колеса	Способ отливки	Механические свойства		Значения σ_{HP} , МПа, при $v_{ск}$, м/с							σ_{FP} , МПа
		$\sigma_{вр}$, МПа	σ_t , МПа	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	
Бр.АЖ9-4	В землю	400	200	250	230	210	180	160	140	120	80
СЧ 15-32	В землю	320	-	130	115	86	-	-	-	-	38

Бр.ОНФ	Центро- бежное литье	290	170	260 (от $v_{ок}$ не зависит)	70
--------	----------------------------	-----	-----	------------------------------	----

20.3. Виды повреждения зубьев. Критерии расчета зубчатых передач. Расчетная нагрузка

Встречаются следующие виды разрушения зубьев: поломка, выкрашивание поверхности, абразивный износ, заедание, пластические сдвиги поверхности, отслаивание твердого поверхностного слоя и т.п.

Поломка зубьев может быть связана с перегрузками и многократно повторяющимися нагрузками, вызывающими усталость материала. При этом основным видом разрушения считают усталостную поломку зубьев, вызываемую переменными во времени изгибными напряжениями у ножки зуба. Для предотвращения поломки зубья рассчитывают по изгибным напряжениям.

Выкрашивание поверхности зубьев носит усталостный характер. Этот вид разрушения наиболее характерен для большинства закрытых хорошо смазываемых зубчатых колес. Причиной усталостного выкрашивания поверхности являются переменные во времени контактные напряжения. Для предотвращения выкрашивания зубья рассчитывают на выносливость по контактным напряжениям.

Таким образом, критериями работоспособности и расчета зубчатых передач являются усталостные изгибные σ_F и контактные σ_H напряжения. За основные в современной расчетной практике приняты контактные напряжения σ_H . Расчеты по предотвращению остальных видов разрушения зубьев или не разработаны, или не-

достаточно обоснованы. Косвенно эти виды повреждения зубьев могут быть предупреждены расчетом по напряжениям σ_F и σ_H при соответствующем выборе допускаемых напряжений σ_{FP} и σ_{HP} (см. § 20.2).

При расчете зубьев на прочность пользуются понятием "расчетная нагрузка", которое учитывает изменение номинальной нагрузки в зацеплении в результате неточностей изготовления и монтажа элементов зубчатых передач, а также их деформации под действием сил. Расчетную нагрузку (T_P , F_P и т.п.) определяют, как номинальную (T , F и т.п.), умноженную на коэффициент расчетной нагрузки $k \geq 1$:

$$T_P = Tk, F_P = Fk \text{ и т.п.} \quad (20.19)$$

Применительно к зубчатым передачам коэффициент расчетной нагрузки k представляют в виде

$$k = k_\beta k_v, \quad (20.20)$$

где k_β - коэффициент неравномерности нагрузки по длине зуба; k_v - коэффициент динамичности нагрузки.

Коэффициенты k_β и k_v зависят от множества факторов (степени точности изготовления, податливости валов и опор, взаимного расположения колес относительно опор, окружной скорости и др.) и теоретически рассчитать их сложно. Поэтому эти коэффициенты определяют преимущественно экспериментально и приводят в виде номограмм или табличных данных. При проектировании величину k обычно задают:

$$k = 1,1 \dots 1,5; \quad (20.21)$$

меньшие значения - для тихоходных передач с симметричным расположением колес относительно опор, большие - для быстроходных и консольных передач.

20.4. Расчет прочности зубьев по контактными напряжениями

Приведем вывод расчетных зависимостей на примере косозубой цилиндрической передачи. Расчет прочности зубьев сводится к удовлетворению условия

$\sigma_H \leq \sigma_{HP}$. При расчете действительных контактных напряжений σ_H принимают следующие допущения.

1. Контактные напряжения на эвольвентной поверхности зубьев определяют по формуле, составленной для контакта двух круглых цилиндров, соприкасающихся по линии:

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{qE_{пр}}{\rho_{пр} 2\pi(1-\mu^2)}}, \quad (20.22)$$

где $q = F/l$ – распределенная (погонная) нагрузка по линии контакта двух цилиндров (F – сжимающая цилиндры сила; l – длина линии контакта цилиндров); $E_{пр} = 2E_1E_2/(E_1 + E_2)$ – приведенный модуль упругости материалов соприкасающихся цилиндров (E_1 и E_2 – модули упругости материалов первого и второго цилиндров); μ – коэффициент Пуассона; $\frac{1}{\rho_{пр}} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}$ – приведенная кривизна двух цилиндров в

зоне их контакта ($\rho_{пр}$, ρ_1 , и ρ_2 – соответственно приведенный радиус кривизны, радиусы кривизны первого и второго цилиндров; знак "+" для внешнего, а знак "-" для внутреннего контакта).

2. Расчет напряжений σ_H ведут для зацепления в полюсе P (рис.20.5). Это допущение оправдано теми соображениями, что выкрашивание поверхности зубьев в действительности начинается у полюсной линии. Это, по-видимому, связано с неблагоприятными условиями для образования слоя смазки в области полюсной линии.

3. Суммарную длину контактных линий l_Σ определяют приближенно, без учета наклона линии контакта косоугольного зуба к полюсной линии, а также ступенчатого ее изменения в процессе зацепления зубьев. Частично эти неточности компенсируют введением корректирующего коэффициента k_ϵ .

4. При составлении расчетной схемы используют параметры эквивалентного колеса: d_{v1} и d_{v2} (рис.20.5,а), зубья заменяют цилиндрами, нагрузку на зубе считают действующей по полюсной линии (рис.20.5,в).

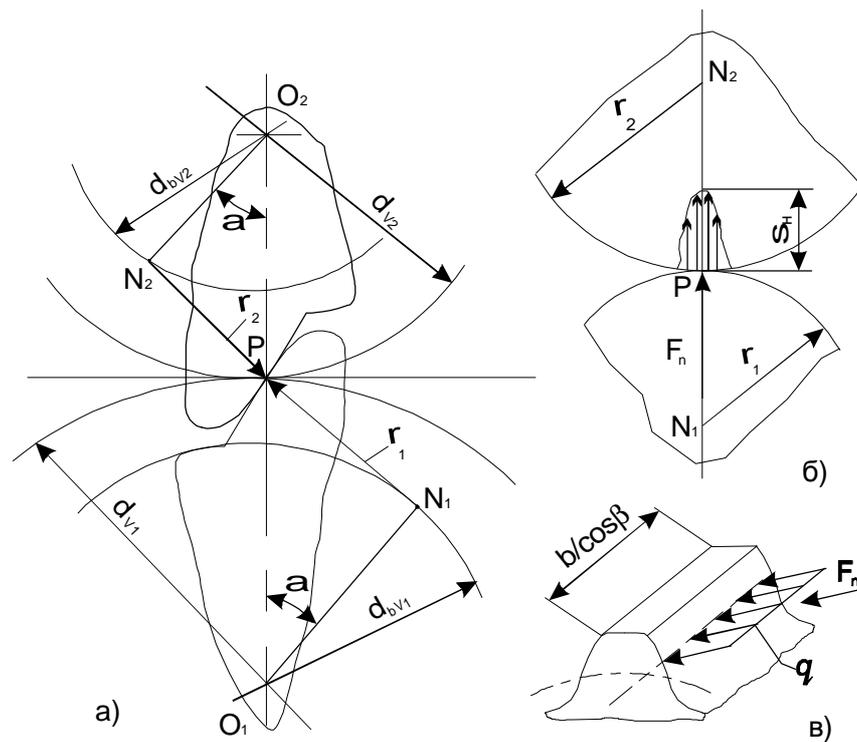


Рис. 20.5

Для определения контактных напряжений σ_H , действующих на поверхности зубьев у полюсной линии, пользуются формулой (20.22), приведенными допущениями и расчетной схемой (рис.20.5). Заменяя профили зубьев двух эквивалентных колес (рис.20.5,а) круглыми цилиндрами (рис.20.5,б) с радиусами ρ_1 и ρ_2 , выражают q и ρ_{np} в формуле (20.22) через параметры рассматриваемой зубчатой передачи. Для распределенной нагрузки с учетом коэффициентов расчетной нагрузки $k_{H\beta}$ и k_{Hv} можно записать:

$$q = \frac{F_n}{l_\Sigma} k_{H\beta} k_{Hv} = \frac{F_t k_{H\beta} k_{Hv}}{\cos\alpha b e_a k_e}, \quad (20.23)$$

где F_n - нормальная сила в зацеплении (см. формулу (20.7)); l_Σ - суммарная длина контактных линий, величина которой определена по формуле

$$l_\Sigma = b \varepsilon_\alpha k_\varepsilon / \cos\beta; \quad (20.24)$$

$b/\cos\beta$ - длина зуба косозубого колеса (рис.20.5,в); ε_α - коэффициент торцевого перекрытия, учитывающий многопарность зацепления; k_ε - корректирующий коэффициент (см. допущение 3).

В соответствии с расчетной схемой (рис.20.5,а) радиусы кривизны эвольвентных зубьев в полюсе P равны

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{d_{v1}}{2} \sin \alpha = \frac{d_1}{2 \cos^2 \beta} \sin \alpha, \\ \rho_2 &= \frac{d_{v2}}{2} \sin \alpha = \frac{d_2}{2 \cos^2 \beta} \sin \alpha,\end{aligned}\tag{20.25}$$

где диаметры эквивалентных колес d_{v1} и d_{v2} определены по формуле (19.32).

Тогда приведенная кривизна контактирующих профилей зубьев в полюсе равна

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \cos^2 \beta}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{d_1} \pm \frac{1}{d_2} \right) = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha} \frac{u \pm 1}{u}.\tag{20.26}$$

Подставим (20.23) и (20.26) в (20.22) и запишем последнюю формулу в следующем виде:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\varepsilon \sqrt{\frac{W_{Ht}}{d_1} \frac{u \pm 1}{u}} \leq \sigma_{HP},\tag{20.27}$$

$$W_{Ht} = \frac{F_t}{b} k_{H\beta} k_{H\alpha};\tag{20.28}$$

$$Z_H = \sqrt{2 \cos^2 \beta / \sin 2\alpha};\tag{20.29}$$

$$Z_M = \sqrt{E_{np} / (\pi (1 - \mu^2))};\tag{20.30}$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{1 / (k_\varepsilon \varepsilon_\alpha)},\tag{20.31}$$

где W_{Ht} - расчетная удельная окружная сила; Z_H , Z_M и Z_ε - коэффициенты, учитывающие соответственно форму сопряженных поверхностей зубьев, механические свойства материалов зубьев колес и многопарность зацепления; $Z_\varepsilon = 1$ - для прямозубых цилиндрических передач.

Формулой (20.27) пользуются при проверочных расчетах прочности зубьев, когда параметры зубчатой передачи известны. При проектном расчете определяют размеры передачи по минимуму исходных данных, например по известным T_2 , u и ω_2 (см. (20.1)). Для этих целей формулу (20.27) решают относительно одного из основных параметров передачи, например, межосевого расстояния a .

В этом случае составляющие формулы (20.27) выражают через a и известные исходные данные

$$\frac{W_{Ht}}{d_1} = \frac{F_t}{d_1 b} k_{H\beta} k_{Hv} = \frac{2 T_2 k_{H\beta} k_{Hv}}{d_1^2 u b} = \frac{T_2 (u \pm 1)^2 k_{H\beta} k_{Hv}}{2 a^3 u \psi_{ba}}, \quad (20.32)$$

здесь использованы соотношения

$$F_t = 2 T_2 / (d_1 u), \quad b = a \psi_{ba},$$

$$d_1 = 2 a / (u \pm 1),$$

где $\psi_{ba} = \frac{b}{a}$ - коэффициент ширины колеса относительно межосевого расстояния, величиной которого при проектировании задаются, например, $\psi_{ba} = 0,2 \dots 0,4$.

Подставляя (20.32) в (20.27) и решая это неравенство относительно a , получают

$$a \geq k_a (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 k_{H\beta}}{u^2 \sigma_{HP}^2 \psi_{ba}}} \quad [\text{мм}], \quad (20.33)$$

$$k_a = \sqrt[3]{(Z_H Z_M Z_\epsilon)^2 0,5 k_{Hv}} \quad [\text{МПа}]^{2/3}; \quad (20.34)$$

размерность остальных параметров: T_2 - Нм, σ_{HP} - МПа, Z_M - МПа.

Формулой (20.33) пользуются при проектировании; расчет ведут для колеса, у которого меньше σ_{HP} . Для этого при известных T_2 и u задаются числовыми значениями k_a , $k_{H\beta}$ и ψ_{ba} , например $k_{H\beta} \cong k = 1,1 \dots 1,4$; $\psi_{ba} = 0,2 \dots 0,4$; $k_a = 430$ для стальных косозубых цилиндрических колес и $k_a = 495$ для стальных прямозубых колес.

После вычисления межосевого расстояния a находят модуль зацепления по соотношению

$$m_n = (0,01 \dots 0,02) \cdot a, \quad (20.35)$$

округляя его до ближайшего стандартного значения. По известным значениям m и a определяют остальные параметры передачи, в том числе усилия, и проверкой по формуле (20.27) убеждаются в правильности выбранных размеров.

Для других видов зубчатых передач выводы расчетных формул проводят аналогично рассмотренному; приведем здесь конечные формулы без выводов. Для проверочных расчетов:

прямозубые конические передачи

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{\frac{W_{Ht} \sqrt{u^2 + 1}}{d_1 u 0,85}} \leq \sigma_{HP}; \quad (20.36)$$

червячные передачи с архимедовым червяком

$$\sigma_H = \frac{5400}{z_2 / q} \sqrt{\left(\frac{z_2 / q + 1}{a}\right)^3 T_2 k_H} \leq \sigma_{HP}, \quad (20.37)$$

где 0,85 – опытный коэффициент; k_H - коэффициент расчетной нагрузки.

Формулы для проектных расчетов:

прямозубые конические передачи со стальными колесами

$$R \geq 495 \sqrt{u^2 + 1} \sqrt[3]{\frac{T_2 k_{H\beta}}{u^2 \sigma_{HP}^2 k_{bm} 0,85}} \text{ [мм]}; \quad (20.38)$$

червячные передачи с архимедовым червяком

$$a \geq 306 \left(\frac{z_2}{q} + 1\right) \sqrt[3]{\frac{T_2 k_H}{(z_2 / q)^2 \sigma_{HP}^2}} \text{ [мм]}, \quad (20.39)$$

где k_{bm} - коэффициент ширины колеса,

$$k_{bm} = \frac{b}{R} = \frac{1}{3} \dots \frac{1}{4}; \quad (20.40)$$

размерность параметров в формулах (20.38) и (20.39): T_2 - Нм, σ_{HP} - МПа.

20.5. Расчет прочности зубьев по изгибным напряжениям

Зуб колеса под воздействием сил находится в сложном напряженном состоянии. Это видно из рис. 20.6, где показана схема действия сил на зуб и эпюры напряжения у ножки зуба. Приведем вывод расчетных зависимостей на примере прямозубой цилиндрической передачи.

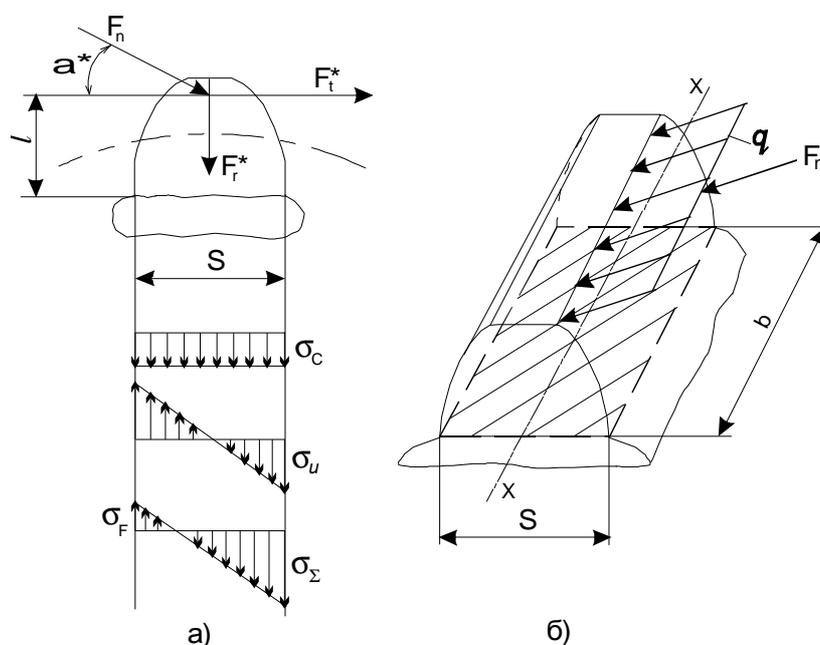


Рис. 20.6

Расчет прочности зубьев сводится к удовлетворению условия $\sigma_F \leq \sigma_{FP}$. При расчете σ_F принимают следующие допущения.

1. Рассматривают наиболее опасный случай, когда нагрузка приложена к вершине зуба; для прямозубых колес считают, что вся нагрузка передается одной парой зубьев. При необходимости более точных расчетов вводят соответствующие поправки.

2. Зуб рассчитывают как консольную балку, для которой справедливы методы сопротивления материалов. Для более точных расчетов следует пользоваться методами теории упругости, так как толщина зуба соизмерима с его высотой (длиной консольной балки) и, следовательно, "балкой" конструкцию зуба можно считать весьма условно. Частично эти неточности корректируются введением теоретического коэффициента концентрации напряжений k_T .

3. Расчет напряжений σ_F ведут по суммарным напряжениям растяжения у ножки зуба, хотя они по модулю меньше, чем напряжения сжатия (см. рис.20.6). Это допущение оправдано тем, что в большинстве практических случаев именно на растянутой стороне зуба возникают трещины усталости, приводящие к излому. Такое явление может быть объяснено тем, что конструкционные материалы хуже воспринимают напряжения растяжения, чем сжатия.

4. Силы трения, действующие на зуб, при выводе расчетных зависимостей не учитывают. Эта неточность частично компенсируется выбором допускаемых напряжения σ_{FP} и коэффициента формы зуба Y_F .

Составляющие нормальной силы F_n , приложенной к вершине зуба под углом α^* (рис.20.6,а), равны

$$F_t^* = F_n \cos \alpha^* = F_t \cos \alpha^* / \cos \alpha ;$$

$$F_r^* = F_n \sin \alpha^* = F_t \sin \alpha^* / \cos \alpha .$$

Определим напряжения в опасном сечении у ножки зуба (прямоугольное сечение с размерами сторон b и s (рис.20.6):

напряжение сжатия

$$\sigma_c = F_r / A_c = \frac{F_t \sin \alpha^*}{b s \cos \alpha} ; \quad (20.41)$$

напряжение изгиба

$$s_u = \frac{M}{W_x} = \frac{F_t^* l}{b s^2 / 6} = \frac{6 F_t l \cos \alpha^*}{b s^2 \cos \alpha} ; \quad (20.42)$$

суммарные напряжения на растянутой стороне зуба

$$s_\Sigma = s_u - s_c ; \quad (20.43)$$

расчетные изгибные напряжения

$$s_F = s_\Sigma k_F k_r = (s_u - s_c) k_T k_{Fb} k_{Fv} , \quad (20.44)$$

где $A_c = bs$ - площадь поперечного сечения; $M = F^* l$ - изгибающий момент, действующий на зуб; $W_x = \frac{b s^2}{6}$ - осевой момент сопротивления изгибу опасного сечения относительно оси x (рис.20.6,б); k_T - теоретический коэффициент концентрации напряжений; k_F , k_{Fb} и k_{Fv} - коэффициенты расчетной нагрузки по изгибным напряжениям.

Размеры l и s (рис.20.6), входящие в зависимости для напряжений, неудобны для расчетов. Поэтому эти величины выражают через модуль

$$l = m l^* \quad \text{и} \quad s = m s^* , \quad (20.45)$$

где l^* и s^* - безразмерные коэффициенты.

Подставив (20.41) и (20.42) в (20.44), после преобразований с учетом (20.45) получим расчетную формулу в следующем виде:

$$\sigma_F = Y_F \frac{W_{Ft}}{m} \leq \sigma_{FP}, \quad (20.46)$$

$$W_{Ft} = F_t k_{F\beta} k_{Fv} / b; \quad (20.47)$$

$$Y_F = \left(6 l^* \cos \alpha^* / s^* - \sin \alpha^* \right) \frac{k_T}{s^* \cos \alpha}, \quad (20.48)$$

где W_{Ft} - удельная расчетная окружная сила; Y_F - коэффициент формы зуба, значения которого приводят в виде таблиц или номограмм в зависимости от числа зубьев Z_v и коэффициентов смещения Ξ .

Для остальных видов передач приведем расчетные формулы для σ_F без выводов:

цилиндрические косозубые колеса

$$\sigma_F = Y_F Y_\varepsilon Y_\beta \frac{W_{Ft}}{m_\eta} \leq \sigma_{FP}; \quad (20.49)$$

конические прямозубые колеса

$$\sigma_F = Y_F \frac{W_{Ft}}{m \cdot 0,85} \leq \sigma_{FP}; \quad (20.50)$$

червячные колеса

$$\sigma_F = 0,7 Y_F \frac{F_{t2} k_F}{b_2 m \cos \gamma} \leq \sigma_{FP}, \quad (20.51)$$

где $Y_\varepsilon = 1 / (\varepsilon_\alpha k_\varepsilon)$ - коэффициент, учитывающий многопарность зацепления; $Y_\beta \cong \cos \beta$ - коэффициент, учитывающий наклон зубьев (более точно $Y_\beta = \beta^\circ / 140^\circ$); 0,85 и 0,7 – опытные коэффициенты; F_{t2} и b_2 - окружная сила на червячном колесе и ширина венца этого колеса; γ - угол наклона зуба на колесе.

По напряжениям изгиба σ_F обычно ведут проверочный расчет; проектный расчет по σ_{FP} выполняют редко, поэтому здесь формул для проектирования по изгибным напряжениям не приводим.

Примеры

Пример 20.1. Определить допускаемые напряжения для зубчатых колес нереверсивной цилиндрической (или конической) передачи.

Решение. Для изготовления зубчатых колес выбираем сталь 45. Назначаем термообработку (см. табл.20.1):

для шестерни – улучшение с твердостью $HB_1 = 223 \dots 285 \cong 250$;

для колеса – нормализация с твердостью $HB_2 = 167 \dots 217 \cong 200$.

Предел контактной и изгибной выносливости при выбранной твердости зубьев определяем по формулам (20.16) и (20.18):

$$\sigma_{H \lim b_1} = 2 HB_1 + 70 = 2 \cdot 250 + 70 = 570 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{H \lim b_2} = 2 HB_2 + 70 = 2 \cdot 200 + 70 = 470 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F \lim b_1} = HB_1 + 260 = 250 + 260 = 510 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{F \lim b_2} = HB_2 + 260 = 200 + 260 = 460 \text{ МПа}.$$

Допускаемые напряжения находим по формулам (20.15) и (20.17):

$$\sigma_{HP_1} = \sigma_{H \lim b_1} / S_H = 570 / 1,15 = 495 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{HP_2} = \sigma_{H \lim b_2} / S_H = 470 / 1,15 = 410 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{FP_1} = \sigma_{F \lim b_1} K_{FC} / S_F = 510 \cdot 1/2,0 = 255 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{FP_2} = \sigma_{F \lim b_2} K_{FC} / S_F = 460 \cdot 1/2,0 = 230 \text{ МПа}.$$

Пример 20.2. Выбрать материал и допускаемые напряжения для венца червячного колеса, если задано: скорость скольжения в зацеплении $V_{\text{сц}}=2$ м/с, способ отливки – в землю.

Ответ: материал – Бр. АЖ 9-4, допускаемые напряжения – $\sigma_{\text{нр}} = 210$ МПа, $\sigma_{\text{фр}} = 80$ МПа.

Пример 20.3. Рассчитать модуль и число зубьев цилиндрической прямозубой передачи с внешним зацеплением, если задано: крутящий момент на колесе $T_2 = 5$ Нм, передаточное число $u = 5$; угловая скорость колеса $\omega_2 = 8,0$ 1/с (среднескоростная передача); колеса относительно опор размещены несимметрично.

Решение. Материал и допускаемые напряжения принимаем такими, как в примере 20.1. В соответствии с рекомендациями в §§ 20.3 и 20.4 принимаем значения коэффициентов: $k_{H\beta} = 1,3$ и $\psi_{ba} = 0,3$. По формуле (20.33) находим:

$$a \geq k_a (u + 1) \sqrt[3]{\frac{T_2 k_{H\beta}}{u^2 \sigma_{HP}^2 \psi_{ba}}} = 495 (5 + 1) \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 1,3}{5^2 \cdot 470^2 \cdot 0,3}} = 46,84 \text{ мм}.$$

Принимаем $a = 50$ мм.

По соотношению (20.35) назначаем модуль:

$$m = (0,01 \dots 0,02) a = (0,01 \dots 0,02) 50 = 0,5 \dots 1,0 \text{ мм.}$$

Принимаем стандартное значение модуля $m = 0,8$ мм.

Решая формулу (20.23) относительно z_1 (числа зубьев шестерни), находим:

$$z_1 = \frac{2a}{m(u+1)} = \frac{2 \cdot 50}{0,8(5+1)} \cong 21.$$

Число зубьев колеса

$$z_2 = z_1 a = 21 \cdot 5 \cong 104.$$

Число зубьев z_2 округлено в меньшую сторону (а z_1 – в большую), чтобы выдержать принятое межосевое расстояние $a = 50$ мм; действительно,

$$a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{0,8(21 + 104)}{2} = 50 \text{ мм.}$$

При принятых значениях z_1 и z_2 передаточное число u равно

$$u = z_2 / z_1 = 104/21 = 4,952;$$

допускается отклонение величины передаточного числа u от заданного в пределах $\pm 4\%$, в нашем случае эта норма выдерживается.

Пример 20.4. Определить модуль, диаметры делительных окружностей червяка и червячного колеса, межосевое расстояние червячной передачи, если задано: крутящий момент на колесе $T_2 = 20$ Нм, угловая скорость червячного колеса $\omega_2 = 6,6 \text{ с}^{-1}$, передаточное число $U = 30$.

Указание: используйте методику расчёта, изложенного в [2].

Ответ: $m = 1,25$, $d_1 = 25$ мм, $d_2 = 75$ мм, $a = 50$ мм.

Вопросы для самопроверки

1. Какие силы в зацеплении прямозубых цилиндрических колёс вы знаете.
2. Напишите формулы для усилий в зацеплении косозубых цилиндрических передач.
3. Как определяют усилия в зацеплении конических колёс.
4. Напишите формулы для усилий в зацеплении червячной передачи.
5. Какие материалы наиболее употребительны для зубчатых колёс и червяков.
6. Назовите виды разрушения зубьев.
7. Какие критерии работоспособности и расчёта используют для зубчатых передач.
8. Что понимают под термином “расчётная нагрузка”.
9. Какие допущения приняты при расчёте зубьев по контактному напряжению.
10. Какие допущения приняты при расчёте зубьев по изгибному напряжению.

Лекция 21. ПЕРЕДАЧА ВИНТ-ГАЙКА

21.1. Основные понятия. Классификация резьб

Передача винт-гайка [5-8] служит для преобразования вращательного движения в поступательное. Обратное преобразование поступательного движения во вращательное используется редко.

Достоинствами винтовых пар являются: плавность и точность хода, возможность создать большие усилия при малых перемещениях, высокая несущая способность при малых габаритах, простота конструкции и изготовления, большое передаточное отношение, возможность получить самотормозящую передачу. К недостаткам следует отнести наличие больших потерь на трение в винтовой паре, что обуславливает низкий КПД и повышенный износ.

Передачи винт-гайка применяют в механизмах точных перемещений (механизмы подачи станков, измерительные и регулировочные устройства, рабочие органы роботов), испытательных машин, приборов. В микроэлектронике винтовые пары чаще всего используются в качестве механизмов перемещения координатных столов.

Винтовая передача может быть выполнена по одной из следующих схем (рис. 3.1):

рис. 21.1,а - винт 1 вращается и движется поступательно, гайка 2 неподвижна; схема обладает наибольшей точностью и ограниченным линейным перемещением винта, применяется в измерительных приборах, зажимах, винтовых прессах;

рис. 21.1,б - винт вращается, гайка движется поступательно, схема обладает меньшей точностью, но большим линейным перемещением гайки, что обусловило ее широкое применение для установочного движения в координатных столах;

рис 21.1,в - гайка вращается, винт движется поступательно, используется для установочных перемещений и в испытательных машинах;

рис. 21.1,г - гайка вращается и движется поступательно, винт неподвижен;

рис. 21.1,д - дифференциальный винт вращается и движется поступательно, гайка движется поступательно, применяется для достижения малых точных перемещений.

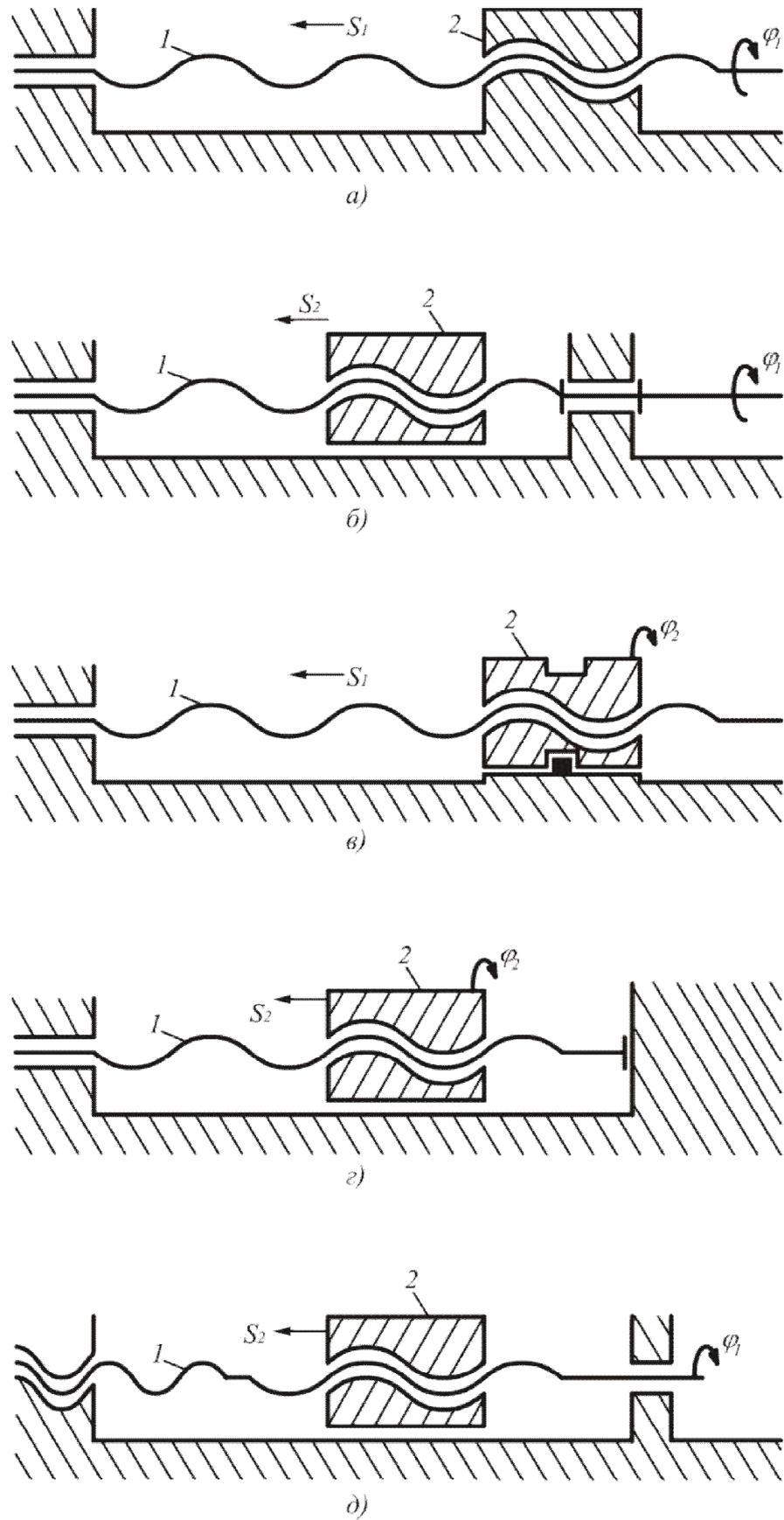


Рис 21.1

Винт и гайка сопрягаются между собой посредством резьбы качения или скольжения. Винтовая пара с трением качения образуется шариками, размещенными

между винтовыми дорожками винта и гайки. Передача винт-гайка с трением скольжения является неразъемным соединением, образуемым с помощью резьбовых крепежных деталей винтов и гаек, причем резьба нанесена непосредственно на соединяемые детали.

Резьба характеризуется следующими основными геометрическими параметрами (рис. 21.2): d - наружный диаметр резьбы; d_1 - внутренний диаметр резьбы; d_2 - средний диаметр резьбы; P - шаг резьбы - расстояние между параллельными сторонами соседних витков, измеренное вдоль оси винта; P_h - ход резьбы, для однозаходной резьбы $P_h = P$; для многозаходной резьбы $P_h = nP$; где n - число заходов; h - рабочая высота профиля; α - угол профиля; γ - угол подъема резьбы образован касательной к винтовой линии в точке на среднем диаметре резьбы и плоскостью, перпендикулярной к оси резьбы, и определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{nP}{pd_2}; \quad (21.1)$$

параметры резьб и допуски на их размеры стандартизованы.

Резьбы делят по следующим признакам:

по форме поверхности, на которую наносится резьба, - на цилиндрическую и коническую резьбу. Наиболее распространена цилиндрическая резьба. Коническую резьбу обычно применяют для плотных соединений труб, масленок, пробок;

по форме профиля - на треугольные, трапецеидальные, круглые и др.;

по направлению винтовой линии - на правую и левую резьбу. Болты с правой резьбой ввинчивают по часовой и вывинчивают против часовой стрелки. Большинство резьб имеет правое направление.

По назначению резьбы разделяют на крепежные, крепежно-уплотнительные и ходовые. Крепежная резьба должна обладать высокой прочностью и большим трением, предохраняющим соединяемые детали от самоотвинчивания. Крепежно-уплотнительные резьбы, кроме указанных качеств, должны обеспечивать повышенную плотность соединения. Ходовые резьбы должны быть с малым трением, чтобы повысить КПД и уменьшить износ.

Метрическая резьба (рис. 21.2,а). Это наиболее распространенная из крепежных резьб. Имеет профиль в виде равностороннего треугольника, следовательно, $\alpha=60^\circ$. Вершины витков и впадин притупляются по прямой или по дуге, что уменьшает концентрацию напряжений, предохраняет резьбу от повреждений. Радиальный зазор в резьбе делает ее негерметичной. По СТ СЭВ 182-75 метрические резьбы делятся на резьбы с крупным и мелким шагом.

Резьбы с мелким шагом меньше ослабляют деталь и характеризуются повышенным самоторможением, так как при малом шаге угол подъема винтовой линии γ мал. Мелкие резьбы применяются в резьбовых соединениях, подверженных переменным и знакопеременным нагрузкам, а также в тонкостенных деталях.

Трубная резьба. Трубная цилиндрическая резьба (рис. 21.2,б) является мелкой дюймовой резьбой, но с закругленными выступами и впадинами. Отсутствие радиальных зазоров делает резьбовое соединение герметичным. Применяется для соединения труб и изготавливается по ГОСТ 6357-73. Высокую плотность соединения дает трубная коническая резьба (ГОСТ 6211-69).

Трапецидальная резьба (рис. 21.2,в). Это основная резьба в передаче винт-гайка. Ее профиль (СТ СЭВ 146-75) - равнобочная трапеция с углом $\alpha=30^\circ$. Характеризуется небольшими потерями на трение, технологична. КПД выше, чем у резьбы с треугольным профилем. Применяется для передачи реверсивного движения под нагрузкой, например, ходовые винты станков.

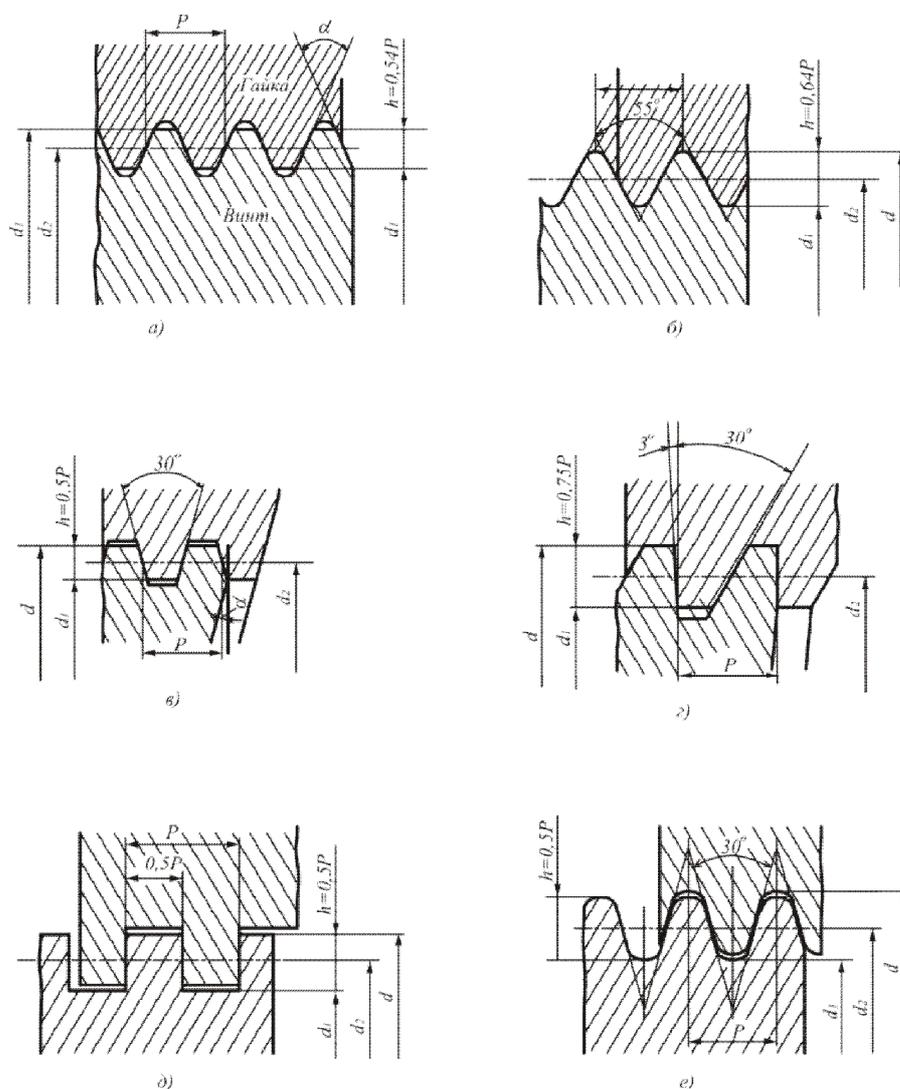


Рис 21.2

Упорная резьба (рис. 21.2,г). Имеет профиль в виде неравнобокой трапеции с углом $\alpha = 30^\circ$. Для изготовления резьбы фрезерованием рабочая сторона профиля имеет угол наклона 3° . КПД выше, чем у трапецидальной резьбы. Закругление впадин повышает усталостную прочность винта. Применяется в передаче винт-гайка при больших односторонних осевых нагрузках. Изготавливается по ГОСТ 10177-62.

Прямоугольная резьба (рис 21.2,д). Профиль резьбы - квадрат. Прямоугольная резьба имеет самый высокий КПД, так как угол профиля резьбы $\alpha = 0$. Обладает пониженной прочностью. При износе образуются осевые зазоры, которые трудно устранить. Резьба не стандартизована. Имеет ограниченное применение.

Круглая резьба. Профиль резьбы состоит из дуг, сопряженных короткими прямыми линиями. Угол профиля $\alpha = 30^\circ$ (рис. 21.2.е). резьба характеризуется высокой

динамической прочностью, не стандартизована. Имеет ограниченное применение: при тяжелых условиях эксплуатации в загрязненной среде, а также в гидравлической арматуре.

21.2. Кинематика винтовых механизмов

Зависимость линейного перемещения ведомой гайки s_2 (рис. 21.1.б) от угла поворота ведущего винта j_1 (функция положения) имеет вид

$$s_2 = \left(\frac{Pn}{2p} \right) j_1 = qj_1, \quad (21.2)$$

где q – аналог скорости или винтовой аналог механизма;

$$q = \frac{Pn}{2p} = \frac{ds_2}{dj} = 0,5d_2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (21.3)$$

Отсюда линейная скорость ведомой гайки

$$J_2 = \frac{ds_2}{dt} = \left(\frac{Pn}{2p} \right) \omega_1. \quad (21.4)$$

Для уменьшения скорости J_2 при заданной угловой скорости ведущего звена ω_1 шаг резьбы P уменьшают, а число ее заходов принимают $n = 1$.

Дифференциальные механизмы имеют пары с разными винтовыми параметрами

$q_1 = \frac{P_1 n_1}{2p}$ и $q_2 = \frac{P_2 n_2}{2p}$ (рис. 3.1,д), поэтому их функция положения

$$s_2 = (q_1 \pm q_2) j_1, \quad (21.5)$$

где знак минус относится к механизмам с резьбами одного направления, а плюс – резьбами разного направления.

21.3. Точность передачи винт-гайка

При конструировании точных механизмов к винтовым парам предъявляют повышенные требования в отношении наименьшего износа их трущихся частей, а также обеспечения точности шага. Точность работы винтовой пары зависит от погрешностей изготовления и сборки передачи, а также от условий эксплуатации (уп-

ругие деформации, износ). Указанные отклонения определяют величины кинематической погрешности и мертвого хода.

Алгебраическая разность между погрешностями положений ведомого звена называют кинематической погрешностью передачи dj_{Σ} .

Согласно ГОСТ 21095-75 минимальное и максимальное значения кинематической погрешности (по методу максимума- минимума) равны

$$dj_{\max} = \sqrt{(dP_{\Sigma})^2 + (E_{\Sigma})^2}; \quad (21.6)$$

где dP_{Σ} - накопленная погрешность шага резьбы, разность расстояний любых несоединенных профилей витков резьбы по образующим среднего диаметра; E_{Σ} - суммарная накопленная погрешность монтажа,

$$E_{\Sigma} = \sqrt{e_p^2 + e_a^2}, \quad (21.7)$$

где e_p и e_a – допуски на монтажные радиальные и осевые биения винтовой передачи.

Мертвый ход возникает вследствие наличия упругих деформаций звеньев и зазоров в винтовой паре и проявляется в том, что при изменении направления движения ведущего звена ведомое звено некоторое время остается неподвижным. Мертвым ходом или зазором в осевом направлении винтовой пары является разность положений ведомого звена при прямом и обратном ходе

$$dC_{\Sigma} = dj_{\text{обр}} - dj_{\text{пр}}. \quad (21.8)$$

где $dj_{\text{обр}}$, $dj_{\text{пр}}$ - погрешность положения ведомого звена при обратном и прямом ходе.

Максимальное значение мертвого хода определяется по формуле

$$dC_{\max} = b'tga' + \sqrt{[(b'' - b')tga']^2 + (btga')^2 + \Delta_{01}^2 + \Delta_{02}^2}, \quad (21.9)$$

где b' , b'' - предельные отклонения среднего диаметра резьбы винта; b – верхнее отклонение среднего диаметра резьбы гайки; α' - угол наклона грани резьбы; Δ_{01}, Δ_{02} - осевые опоры в зазорах вращения.

Ошибки перемещения винтовых пар, обусловленные мертвым ходом и кинематической погрешностью, стремятся уменьшить или устранить совсем. Это достигается с помощью специальных регулировочных устройств. Различают способы регулирования: осевое и радиальное. При осевом регулировании уменьшают осевой зазор в резьбе винта и гайки путем относительного осевого смещения части составной гайки. Для радиального регулирования применяют разрезные гайки.

21.4. Передача винт-гайка с трением скольжения

Передача с трением скольжения проста по конструкции, позволяет осуществлять точные перемещения, надежно работает при ударных нагрузках. К недостаткам этой передачи относятся низкие значения КПД, повышенный износ рабочих поверхностей. В этих передачах преимущественно применяются следующие типы стандартных резьб: метрическая (рис. 21.2,а), трапецеидальная (рис 21.2,в), упорная (рис. 21.2,г).

Силовой расчет и КПД передачи винт-гайка. При рассмотрении сил в винтовой паре резьбу удобно развернуть по среднему диаметру d_2 в наклонную плоскость, а гайку заменить ползуном (рис. 21.3). При равно мерном перемещении вверх по наклонной плоскости ползун находится в состоянии равновесия под действием системы сил F , F_t , N и $F_{тр}$, из которых F - осевая сила, N - нормальная реакция наклонной плоскости, $F_{тр} = fN$ - сила трения, где f - коэффициент трения. Заменяем силы N и $F_{тр}$ их равнодействующей R . Угол r между векторами сил R и N называется углом трения, причем $r = \arctg f$. Проектируя систему сил на ось $x-x$, расположенную под углом $\gamma + r$ к горизонтали, получим $\Sigma x = 0$:

$$-F \sin(\gamma + r) + F_t \cos(\gamma + r) = 0, \quad (21.10)$$

откуда

$$F_t = F \operatorname{tg}(g + r). \quad (21.11)$$

Полученная зависимость между F и F_t справедлива только для прямоугольной резьбы. В треугольной и трапецидальной резьбе имеется повышенное трение вследствие клинчатой формы витков резьбы.

На рис. 21.4 сопоставляются прямоугольная и треугольная резьбы. Осевая сила F воспринимается гайкой через нормальные силы. Без учета угла подъема резьбы получим выражение для суммарной силы трения в резьбе в следующем виде:

для прямоугольной резьбы

$$F_{mp} = 2 \frac{N_2}{2} f = Ff; \quad (21.12)$$

для треугольной резьбы

$$F_{mp} = 2 \frac{N_2}{2} f = \frac{Ff}{\cos(a/2)} = Ff', \quad (21.13)$$

где f - приведенный коэффициент трения в резьбе;

$$f' = f / \cos(a/2). \quad (21.14)$$

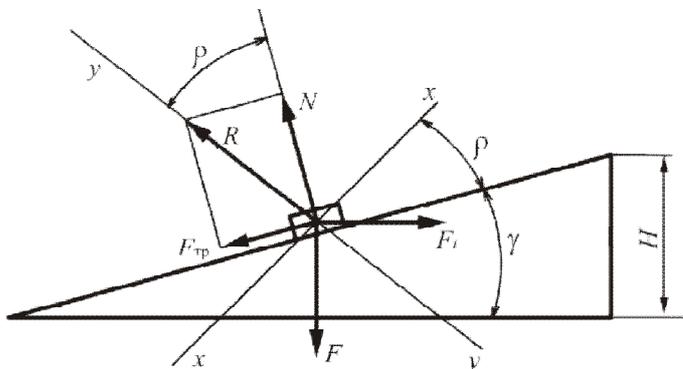


Рис. 21.3

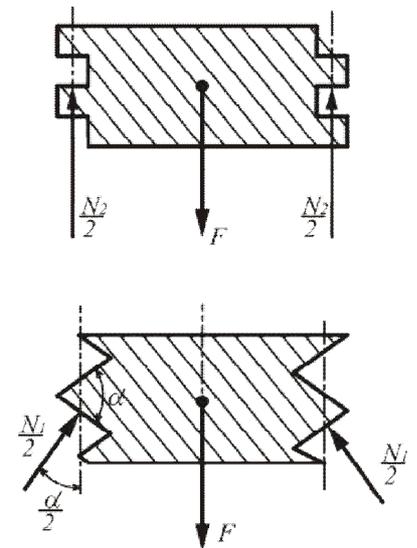


Рис. 21.4

Таким образом, для определения окружной силы F_t в винтовой паре с треугольной или с трапецидальной резьбой в формулу (21.10) необходимо подста-

вместо действительного угла трения приведенный угол $r' = \arctg(f) = \arctg(f/\cos(\alpha/2))$ трения:

$$F_t = Ftg(g + r'). \quad (21.15)$$

Момент T в резьбе от окружной силы F_t , приложенной по касательной к окружности среднего диаметра резьбы,

$$T = F_t \frac{d_2}{2} = \frac{Fd_2}{2} tg(g + r'). \quad (21.16)$$

КПД резьбы определяется как отношение полезной работы на винте к затрачиваемой работе на ключе при повороте на произвольный угол. Для простоты и общности вывода удобно рассматривать поворот на малый угол $d\gamma$. КПД собственной резьбы без учета трения на торце

$$h = \frac{Fdh}{Tdj'} \quad (21.17)$$

где dh - осевое перемещение, соответствующее перемещению на угол $d\gamma$;

$$dh = \frac{d_2}{2} dj' tg g$$

Используя формулу (21.16), получаем

$$h = \frac{tg g}{tg(g + r')}. \quad (21.18)$$

Момент, необходимый для отвинчивания гайки или винта с головкой описывают аналогично моменту завинчивания, только направления момента и сил трения меняют на обратные

$$T_{oms} = \frac{Fd_2}{2} tg(g - r'). \quad (21.19)$$

Условия самоторможения $T_{отв} > 0$, отсюда $tg(g - r') > 0$ и, следовательно $g < r'$.

Для крепежных резьб угол подъема $\gamma = 1,5-4^\circ$, а угол трения ρ' изменяется в зависимости от величины коэффициента трения от 6 до 16° . Таким образом, все крепежные резьбы самотормозящиеся. Однако в условиях вибрационных нагрузок возможно ослабление затяжки резьбы, во избежание чего применяют специальные стопорные устройства. Ходовые резьбы выполняют как самотормозящими, так и несамотормозящими.

Расчет элементов резьбы на прочность проводят по условным напряжениям, которые сравнивают с допускаемыми напряжениями, установленными на основе опыта. При определении условных напряжений полагают, что все витки резьбы нагружены равномерно. Резьбу рассчитывают (см. рис.21.5) по напряжениям среза в сечении av винта или ce гайки и по напряжениям смятия на винтовой поверхности.

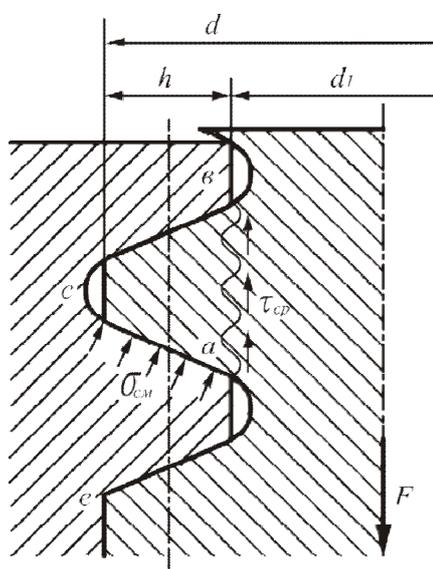


Рис. 21.5

Если винт и гайка изготовлены из одного материала, то более опасным является срез витков резьбы винта, происходящий по цилиндрической поверхности s_{cp} диаметра d_1 в сечении av (рис.21.5). Если же материал гайки менее прочен, чем материал винта, то $s_{cp} \ll 8$ может произойти и по боковой поверхности цилиндра d гайки, в сечении ce (рис. 21.5). Напряжение среза в сечении av (рис. 21.5) находим

$$t_{cp} = \frac{F}{s_{cp}} = \frac{F}{pd_1 b H k} \leq [t]_{cp}. \quad (21.20)$$

где s_{cp} - площадь среза; b - коэффициент полноты резьбы, для трапецеидальной $b = 0,65$, для метрической $b = 0,87$; H - высота гайки; k - коэффициент равномерности распределения нагрузки F_2 по виткам резьбы, принимаемый в пределах $k = 0,55 - 0,75$ (большие значения относятся к крупной метрической резьбе); $[t]_{cp}$ - допустимое напряжение среза.

Напряжение смятия на винтовой поверхности (рис. 21.5)

$$s_{см} = \frac{F}{s_{см}} = \frac{4F}{p(d^2 - d_1^2)kz} \leq [s]_{см}, \quad (21.21)$$

где $s_{см}$ - площадь смятия одного витка, $s_{см} = p/4(d^2 - d_1^2)$; z - число витков резьбы на гайке; $[s]_{см}$ - допустимое напряжение смятия.

Критерии работоспособности и расчета. Основными причинами выхода из строя винтовых передач с трением скольжения являются износ резьбы, поломка винта, а при значительных длинах винта - потеря его устойчивости. Для обеспечения необходимой износостойкости передачи необходимо, чтобы давление p в резьбе не превышало допустимого удельного давления $[p]$, для чего пользуются формулой (21.21), записав ее в следующем виде:

$$p = \frac{F}{pd_2hz} \leq [p], \quad (21.22)$$

где h - высота рабочей поверхности витка резьбы.

Для проектного расчета зависимость (21.22) решают относительно среднего диаметра резьбы d_2 :

$$d_2 = \sqrt{\frac{F}{py_n y_h [p]}}, \quad (21.23)$$

где $y_n = H/d_2$ - коэффициент длины резьбы; $y_h = h/p$ - коэффициент высоты профиля резьбы.

Для обеспечения необходимой износостойкости передачи значения $[p]$ принимают заниженными:

сталь - чугун $[p] = 4-5$ МПа;

незакаленная сталь - бронза $[p] = 8-10$ МПа;

закаленная сталь - бронза $[p] = 11-13$ МПа;

Давление в резьбе винтов точных перемещений назначают в 2-3 раза меньше, чем для винтов общего назначения. Принимают $y_h = 0,5$ для трапецеидальной и $y_h = 0,75$ для упорной резьбы. Коэффициент длины резьбы принимают $y_n = 1,2-2,5$, причем большие значения берут для резьб меньших диаметров. Полученное значение d_2 согласуют со стандартом.

21.5. Передача винт-гайка с трением качения

Для повышения КПД трение скольжения в винтовой паре заменяют трением качения. Шариковые винтовые пары получили широкое применение в приводах передач станков с программным управлением, в роботах, механизмах точных перемещений, в следящих системах, а также в силовых передачах. Передача винт-гайка качения состоит из винта, гайки и комплекта шариков, размещенных в канавках винта и гайки (рис 21.6). Наибольшее распространение имеет полукруглый профиль винтовых канавок, радиус которых на 3-5% больше радиуса r_1 шариков, а угол контакта шариков $\alpha_1 = 45^\circ$ (рис. 21.7,а). Применяется также профиль в виде стрельчатой арки с четырехточечным контактом шариков, который позволяет создавать предварительный натяг подбором диаметра шариков (рис. 21.7,б).

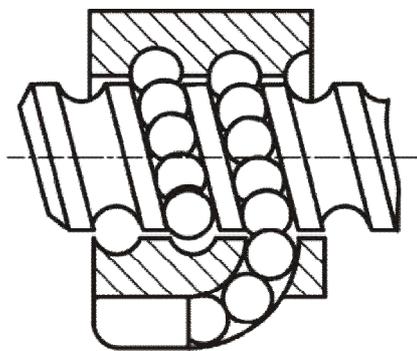


Рис. 21.6

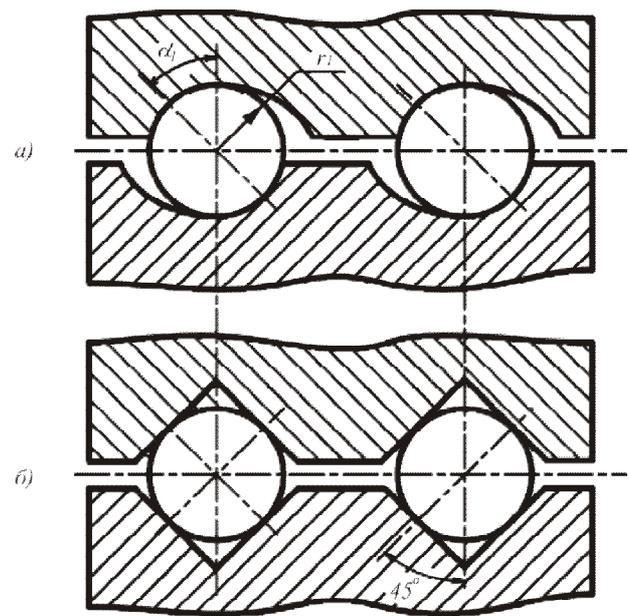


Рис. 21.7

В большинстве конструкций шарики перемещаются по замкнутой траектории в гайке. Выкатываясь из резьбы, они затем возвращаются в исходное положение по обводным каналам, которые могут быть выполнены в виде изогнутой трубки или специального вкладыша, вставленного в дно гайки. Число шариков z , которые непрерывно циркулируют в замкнутой системе, включающей и обводной канал, обычно не превышает $z=50$. При большем числе z возрастают потери на трение в обводном канале, что обуславливает уменьшение КПД. Диаметр шариков $2r_1$

обычно составляет 0,6 от шага винта: $2r_l = 0,6P$. КПД передач качения без предварительного натяга достигает при малом шаге (угол подъема резьбы $\gamma < 30^\circ 3'$) $\eta = 0,85$, при большем шаге $\eta = 0,9$. В случае предварительного натяга повышается жесткость соединения винт-гайка, но уменьшается КПД, определяемый по формуле,

$$h = (k_h \operatorname{tg} g) / \operatorname{tg}(g + r^*), \quad (21.24)$$

где k_h - коэффициент, зависящий от предварительного натяга; r^* - приведенный угол трения:

$$r^* = \operatorname{arctg}(k/r_l \sin a_1), \quad (21.25)$$

k - коэффициент трения качения, $k = 0,01$ мм.

При этом движущий момент

$$T = FR \operatorname{tg}(g + r^*) \quad (21.26)$$

где R - расстояние от центра шарика до оси вращения винта; F - осевая сила в передаче.

Допустимая статическая нагрузка $[F]$ определяется исходя из допускаемых контактных напряжений $[s]_k = 2500$ МПа (твердость рабочих поверхностей HRC 60):

$$[F] = 9,81 F_1 z_p \sin a_1 \sin g \quad (H), \quad (21.27)$$

Где F_1 - нагрузка на один шарик,

$$F_1 = 78,5 (r_1)^2 \quad (\text{мм}), \quad (21.28)$$

Нагрузку $[F]$ принимают за расчетную для тихоходных периодически работающих передач.

Винты, работающие на сжатие, следует рассчитывать на устойчивость против продольного изгиба.

Примеры расчетов передач винт-гайка приведены в [6,8].

Список литературы

1. Прикладная механика в микроэлектронике. Конспект лекций. Часть 2. Детали приборов и оборудования /Под ред. д.т.н. проф. В.Н. Тимофеева.- М.: МИЭТ,/ 1998. – 146с.
2. Расчеты и проектирование элементов технологического оборудования микроэлектроники (Учебное пособие)/ Под ред. В.З. Гребенкина, М.: МИЭТ. – 111с.
3. В.З. Гребенкин, А.А. Дегтярев, Д.И. Косачева и др. Элементы механических устройств. Учебное пособие- М.: МИЭТ, 1997. – 204с.
4. Р.Д. Бейзельман, Б.Д. Ципкин, Л.Я. Перель. Подшипники качения. Справочник. –М.: Машиностроение, 1975 – 572с.
5. Детали и механизмы металлорежущих станков. В 2-х томах, Т1/Т2. Под редакцией д.т.н. Д.Н.Решетова. – М.: Машиностроение, 1972. -664с./520с.
6. М.Н. Иванов. Детали машин. Учебник. М.: “Высшая школа”, 1991.- 383с.
7. Е.А. Вопилкин. Расчет и конструирование механических приборов и систем. Учебное пособие. – М.: “Высшая школа”, 1991. -383с.
8. В.З. Гребенкин, А.А. Дегтярев, А.И. Погалов. Проектирование механических передач с гибкими звеньями, винтовых и мальтийских механизмов. Учебное пособие. /Под ред. д.т.н. проф. В.З. Гребенкина. – М.: МИЭТ, 1995. – 145с.
9. О.А. Ряховский, С.С. Иванов. Справочник по муфтам. – Л.: Политехника, 1991. – 285с.

Лекция 22. ВАЛЫ И ОСИ

22.1 Проектный расчет и конструирование валов

Валы предназначены для размещения элементов в механических устройствах и передачи крутящего момента между вращающимися деталями: зубчатыми колесами, муфтами, шкивами и т.п. Валы изготавливаются прямыми, коленчатыми, гибкими, сплошными и полыми. Валы работают на кручение и на изгиб. Оси служат для поддержания вращающихся деталей и крутящего момента не передают; они бывают вращающимися и неподвижными.

Валы и оси изготавливают обычно из углеродистых или легированных сталей: сталь 45 или 40Х – для валов с термообработкой, сталь 20 и 20Х – для быстроходных валов на подшипниках скольжения с поверхностной цементацией опорных поверхностей (цапф), сталь Х18Н9Т – для валов, работающих в вакуумных установках, сталь Ст. 5 – для неответственных валов без термообработки.

Валы рассчитывают на статическую прочность, выносливость при действии переменных циклических напряжений, жесткость и вибрации.

Предварительный проектный расчет вала ведется только по крутящему моменту, так как величина изгибающих моментов в опасных сечениях может быть найдена после определения размера вала. При проектном расчете находят наименьший диаметр вала на участке, где действует крутящий момент T (Н*мм), по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau_{кр}]}} \quad (22.1)$$

Допустимое напряжение на кручение $[\tau_{кр}]$ берется при этом заниженным, так как в действительность кроме кручения на вал действует изгиб, который в данном расчете не учитывается. Для стальных валов принимается $[\tau_{кр}] = 10-30$ МПа. Диаметр конца вала, соединяемого с электродвигателем, следует согласовать с диаметром вала электродвигателя, при этом разность диаметров не должна превышать

25%. Наименьший диаметр конца вала червяка должен составлять не меньше половины от диаметра его окружности впадин df .

После вычисления наименьшего диаметра вала разрабатывается его конструкция. Вал обычно имеет ступенчатую форму. Диаметры цилиндрических ступеней назначают из рядов $Ra20$ и $Ra40$ в соответствии с требованиями ГОСТ 8032-84 на нормальные линейные размеры [1-3]. Для точных сопряжений в электронной промышленности рекомендуется использовать, как правило, диаметры из рядов $Ra5$ и $Ra10$. Диаметры опорных шеек вала должны соответствовать размерам внутренних колец подшипников. Конические посадочные поверхности используются для точной центровки деталей, насаживаемых на вал.

Длина каждой ступени вала определяется шириной посаженных на него деталей: ступиц зубчатых колес, муфт, подшипников, а также подшипниковых крышек. Длина должна быть выбрана такой, чтобы не затруднить точную обработку посадочных поверхностей, монтаж и съем деталей. Для того, чтобы предотвратить осевые перемещения, все детали фиксируются с помощью, буртиков, распорных втулок, пружинных или резьбовых колец, штифтов и т.п.

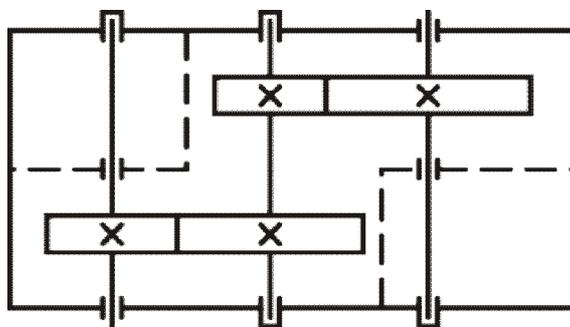


Рис. 22.1

В сложных многоступенчатых механизмах длина входного и выходного валов, как правило, определяется длиной промежуточного вала, на который насажено наибольшее количество деталей. Форму корпуса делают простой, удобной для обработки даже за счет удлинения валов, уменьшения их жесткости. Последнее иллюстрируется, например, на рис. 22.1, на котором показана схема двухступенчатого зубчатого механизма. Рекомендуемая форма корпуса отмечена сплошной линией. Сопряжение вала с насаженными на него деталями (муфты, зубчатые колеса, шарикоподшипники) осуществляется, как правило, в системе отверстия по пере-

ходным посадкам, обеспечивающим хорошую центровку деталей и допускающим разборку и повторную сборку узла. Посадочные поверхности вала обрабатываются обычно по шестому квалитету, в особо точных узлах – по пятому, в неответственных узлах – по седьмому или даже восьмому квалитету. Точность отверстия, как правило, на один квалитет грубее, чем у вала. Примеры конструктивного оформления валов с насаженными на них деталями показаны на рис. 22.2. а,б.

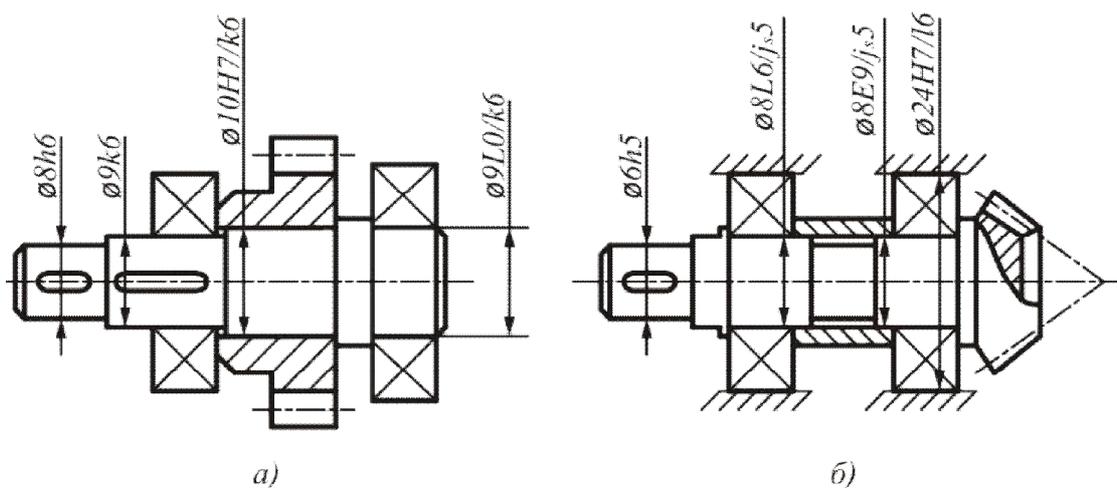


Рис. 22.2

При небольшой длине вала (10 – 50 мм) его иногда выполняют бесступенчатым цилиндрическим, если это позволяют условия посадки на вал сопряженных с ним деталей (рис. 22.3).

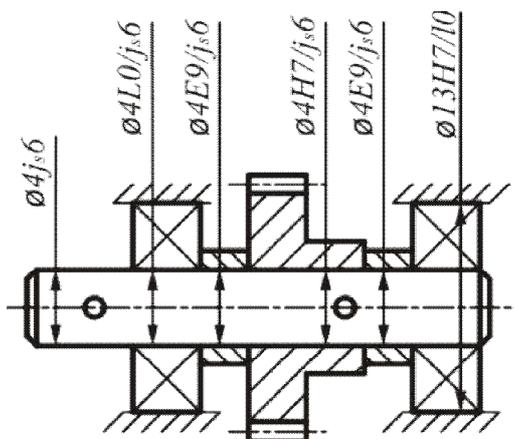


Рис. 22.3.

Посадочные поверхности вала после термообработки шлифуются ($\sqrt{Ra_{2,5}} - \sqrt{Ra_{0,63}}$). Для выхода шлифовального круга, а также для точной обработки опорных буртиков вала рекомендуется у края посадочной поверхности предусматривать кольцевые проточки глубиной 0,15 – 0,25 мм и шириной 1 -2 мм (рис. 22.4, а). Если применение канавок по условию прочности нецелесообразно, то допускаются скругления радиусом до 0,5 мм. В торцах вала делают центровые конусные отверстия с углом конуса 60° (рис. 22.4, б).

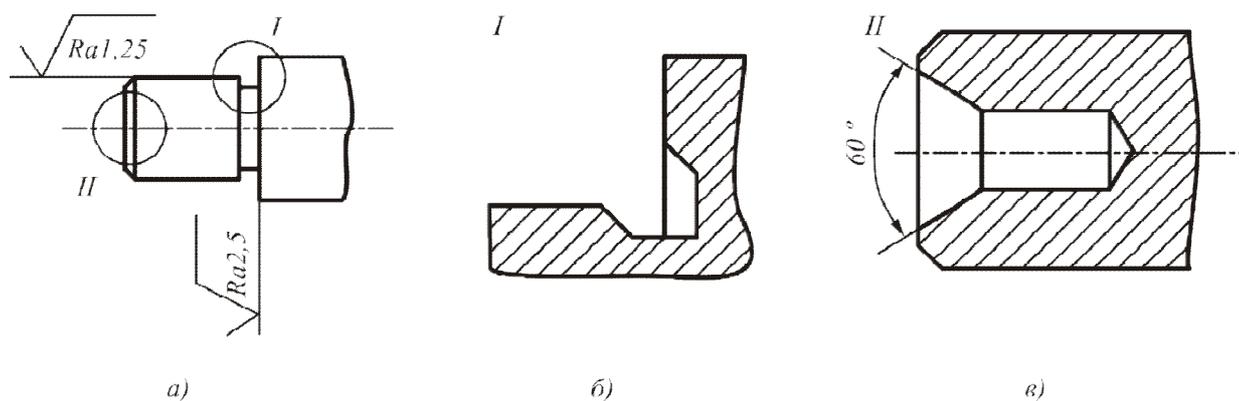


Рис. 22.4

Передача крутящего момента между валом и насаженными на него деталями осуществляется с помощью призматических (при $d \geq 3$ мм) шпонок, а также посредством цилиндрических или конических штифтов (обычно при $d \leq 10$ мм).

22.2. Проверочные расчеты статической и усталостной прочности вала

Проверочные расчеты вала проводятся после окончательного назначения диаметральных и осевых размеров всех его элементов с учетом внешних сил и моментов, действующих на вал, включая реакции опор. При этом нагрузки, распределенные по длине ступицы или длине подшипника, рассматриваются как сосредоточенные. Усилия, возникающие в зубчатом или червячном зацеплении, представляют в виде трех составляющих: F_t – окружная; F_r – радиальная; F_a – осевая, величины которых зависят от геометрии зацепления [I] и от крутящего момента на валу.

При соединении валов посредством муфт из-за несоосности валов, вызванной погрешностями монтажа, возникает дополнительная радиальная сила F_m . В упру-

гих муфтах эта сила невелика (до $0,1F$) и ею можно пренебречь, в жестких муфтах она может достигать $0,5F$, где F – условная окружная сила на рабочей поверхности муфты. Так как направление силы F_m заранее неизвестно, то при составлении расчетной схемы ее направляют так, чтобы она увеличивала напряжения и деформации вала от основной нагрузки, т.е. при этом рассматривается наиболее неблагоприятный случай.

Для определения реакций опор целесообразно сначала составить пространственную силовую расчетную схему для рассматриваемого механизма, заменив связи между его звеньями реакциями связей. При этом реакции в шарнирах раскладываются на координатные оси. На рис. 22.5,а в качестве примера показана кинематическая схема одноступенчатого зубчатого цилиндрического редуктора, приводимого в движение ременной передачей, а на рис. 22.5,б – соответствующая расчетная силовая схема. Напомним, что силы, действующие на звено 1 со стороны звена 2 и стойки 0, равны и противоположны силам, действующим со стороны звена 2 и стойки 0 на звенья 2 и 0, т.е. $Q_{12} = -Q_{21}$, $Q_{A10} = -Q_{A01}$, $Q_{C10} = -Q_{C01}$. и т.д. это относится также к горизонтальным и вертикальным составляющим этих сил: $F_{t12} = -F_{t21}$ и т.д.

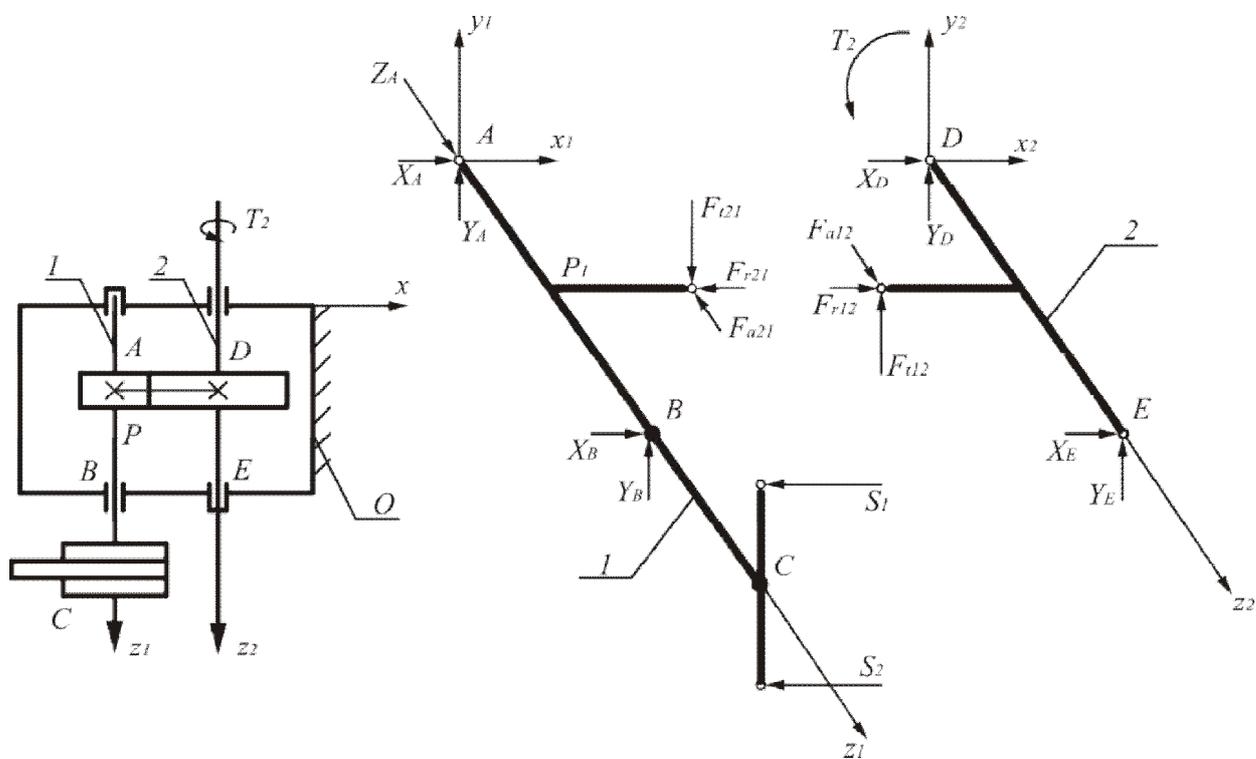


Рис. 22.5

Условия равновесия корпуса 0 используются для определения усилий на фундаментных болтах и для проверки. В данной главе они не рассматриваются, поэтому для упрощения записи индексы 01 и 02 на соответствующих реакциях опущены.

Крутящий момент задается обычно на выходном звене. По моменту определяется окружная составляющая Ft усилия в зацеплении, затем вычисляются Fr и Fa . После этого рассматриваемое звено со всеми приложенными к нему силами проектируется на горизонтальную и вертикальную плоскости, проходящие через ось вала, определяются реакции опор и строятся эпюры изгибающих и крутящих моментов, действующих на вал.

В опасных сечениях определяется суммарный изгибающий момент $M_H = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, по которому вычисляется напряжение изгиба

$$s_H = \frac{M_H}{W_H}, \quad (22.2)$$

Напряжения от кручения находят по крутящему моменту T .

$$t_{кр} = \frac{T}{W_p}, \quad (22.3)$$

где W_H – момент сопротивления изгибу; W_p – полярный момент сопротивления кручению.

Расчет вала на статическую прочность проводится для того, чтобы в процессе работы не возникало пластических деформаций. Расчет обычно ведется по четвертой теории прочности. Условие прочности имеет вид

$$s_{ЭКВ} = \sqrt{s_u^2 + 3t_{кр}^2} \leq [s], \quad (22.4)$$

где $[s] = \frac{s_T}{n_{ТП}}$ – допустимое напряжение для материала вала; $s_{ЭКВ}$ – эквивалентное напряжение; s_T – предел текучести. Запас прочности по пределу текучести $n_{ТП}$ должен учитывать перегрузки, возникающие при работе механизма, а также при его пуске.

Расчет на выносливость, или усталостную прочность, является основным проверочным расчетом вала. Нормальные напряжения от изгиба в материале вращающегося вала изменяются по симметричному циклу. Цикл изменения касательных напряжений от крутящегося момента условно принимается отнулевым (пульсационным) для случая нереверсивной нагрузки (пуск – остановка) и симметричным при реверсивной нагрузке.

Амплитудные σ_A , τ_A и средние значения напряжений σ_M , τ_M в опасном сечении сплошного вала равны:

$$s_A = s_{\max} = \frac{M_H}{0,1d^3}; s_M = 0; \quad (22.5)$$

$$t_A = t_M = \frac{1}{2} t_{\max} = \frac{1}{2} \frac{T}{0,2d^3}, \quad (22.6)$$

если нагрузка нереверсивная, или для касательных напряжений

$$t_A = t_{\max} = \frac{T}{0,2d^3}; t_M = 0; \quad (22.7)$$

если нагрузка реверсивная.

Запас выносливости по нормальным касательным напряжениям вычисляется по формулам:

$$s_s = \frac{s_{-1}}{\frac{K_s}{K_d K_F} s_A + \varphi_s s_M} \quad (22.8)$$

$$s_t = \frac{t_{-1}}{\frac{K_t}{K_d K_F} s_A + \varphi_t s_M} \quad (22.9)$$

где K_s и K_t – эффективные коэффициенты концентрации напряжений; φ_s и φ_t – коэффициенты, учитывающие влияние постоянной составляющей цикла на усталостную прочность; K_F – коэффициент, учитывающий шероховатость поверхности;

K_d - масштабный фактор; s_{-1} и t_{-1} – пределы выносливости материала по нормальным и касательным напряжениям, которые можно вычислить по приближенным формулам через предел прочности материала s_e .

$$s_{-1} = (0,4 - 0,45)s_e, \quad (22.10)$$

$$t_{-1} = (0,55 - 0,6)s_e, \quad (22.11)$$

Коэффициент запаса усталостной прочности при совместном действии кручения и изгиба определяется по следующей зависимости:

$$s = \frac{s_s s_t}{\sqrt{s_s^2 + s_t^2}}, \quad (22.12)$$

Для редукторных валов должен быть обеспечен запас выносливости $s \geq 1,5 - 3$.

Величины коэффициентов, входящих формулы (22.8) и (22.9), зависят от конструкции вала и от его материала (см., например [3]).

Червяки рассчитываются по диаметру впадин df , при этом принимают $ks = 2,3 - 2,5$; $kt = 1,7 - 1,9$.

Примеры проектного и уточненного расчетов вала приведены в [3].

22.3. Расчет на жесткость

Прогиб вала ведет к концентрации нагрузки по длине зуба колеса, сидящего на валу, снижает точность работы механизма.

Для валов зубчатых и червячных передач стрела прогиба f под колесом допускается равной

$$f \leq [f] = (0,005 - 0,010)M \quad (22.13)$$

где M – модуль зацепления.

В станкостроении принимается

$$f \leq [f] = (0,0002 - 0,0003)l \quad (22.14)$$

где l – расстояние между опорами.

Допустимый угол поворота сечения вала определяется типом опоры:

$[\theta] = 0,001$ рад. при подшипниках скольжения;

$[\theta] = 0,01$ рад. при радиальных однорядных шарикоподшипниках;

$[\theta] = 0,05$ рад. при сферических радиальных шарикоподшипниках.

Величина фактического прогиба и угла поворота сечения определяется интегрированием дифференциального уравнения упругой линии балки (например, с помощью интеграла Мора или способа Верещагина).

Если запас выносливости вала оказывается $s \geq 3$, то проверка валов на жесткость проводится лишь при наличии особых требований.

Обычно на жесткость проверяют червяки, принимая $[f] = (0,005 - 0,010)M$.

При симметричном расположении опор прогиб равен

$$f = \frac{l^3}{48EJ_{\text{пр}}} \sqrt{F_t^2 + F_r^2}, \quad (22.15)$$

где $J_{\text{пр}}$ - приведенный момент инерции поперечного сечения червяка,

$$J_{\text{пр}} = \frac{pd^4}{64} \left(0,375 + 0,625 \frac{d_{A1}}{d_{f1}} \right), \quad (22.16)$$

где d_{A1} и d_{f1} - диаметры цилиндров впадин и вершин червяка; E – модуль упругости материала.

При относительном диаметре червяка $q \geq 12$ жесткость червяка, как правило, достаточно велика и проверка его прогиба не обязательна.

Иногда требуется ограничить угол закручивания j вала на всей длине или угол закручивания j_0 на единицу длины

$$j = \frac{rl}{GJ_p} \leq [j], \quad j_0 = \frac{j}{l} = \frac{r}{GJ_p} \leq [j_0], \quad (22.17)$$

где r – крутящий момент; l – длина вала; G – модуль упругости при сдвиге; J_p – полярный момент инерции сечения вала.

Для ступенчатого вала, нагруженного несколькими крутящими моментами, деформация определяется по участкам и суммируется.

Допустимое значение угла закручивания для валов в металлорежущих станках $[j_0] = 1,5 \cdot 10^{-3}$ рад/м.

22.4. Проверка на колебания

Как правило, на колебания проверяются длинные тонкие быстроходные валы, с эксцентричным расположением масс, а также валы, к которым приложена переменная внешняя сила.

Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без учета демпфирования описываются зависимостью

$$x = \frac{a}{M(\omega_c^2 - \omega^2)} \sin \omega t, \quad (22.18)$$

где M – масса системы; a – амплитуда возмущающей силы; ω – круговая частота возмущающей силы (частота вынужденных колебаний); ω_c – круговая частота свободных колебаний системы.

Частота свободных изгибных колебаний системы может быть найдена по статическому прогибу f под действием веса ротора

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{f}}, \quad (22.19)$$

где g – ускорение силы тяжести.

При $\omega = \omega_c$ наступает резонанс. Длительная работа машины в резонансной области может привести к разрушению вала и опор даже при небольшой неуравновешенности. После прохождения резонанса при $\omega > \omega_c$ снова наступает режим спокойной работы. При этом колебания происходят в противофазе по отношению к возмущающей силе и центр масс неуравновешенного ротора приближается к гео-

метрической оси вращения. Такой ротор называют гибким. За пределы вибрационной устойчивости обычно принимают:

для жестких валов $\omega \leq 0,7 \omega_c$;

для гибких валов $\omega \geq 1,3 \omega_c$;

Под действием переменных крутящих моментов в системе возникают крутильные колебания. Во избежание вредного влияния резонанса рабочая частота вращения здесь также должна отличаться от резонансной на $\pm 30\%$.

Список литературы

1. Прикладная механика в микроэлектронике. Конспект лекций. Часть 2. Детали приборов и оборудования /Под ред. д.т.н. проф. В.Н. Тимофеева.- М.: МИЭТ, / 1998. – 146с.
2. Расчеты и проектирование элементов технологического оборудования микроэлектроники (Учебное пособие)/ Под ред. В.З. Гребенкина, М.: МИЭТ. – 111с.
3. В.З. Гребенкин, А.А. Дегтярев, Д.И. Косачева и др. Элементы механических устройств. Учебное пособие- М.: МИЭТ, 1997. – 204с.
4. Р.Д. Бейзельман, Б.Д. Ципкин, Л.Я. Перель. Подшипники качения. Справочник. –М.: Машиностроение, 1975 – 572с.
5. Детали и механизмы металлорежущих станков. В 2-х томах, Т1/Т2. Под редакцией д.т.н. Д.Н.Решетова. – М.: Машиностроение, 1972. -664с./520с.
6. М.Н. Иванов. Детали машин. Учебник. М.: “Высшая школа”, 1991.- 383с.
7. Е.А. Вopilкин. Расчет и конструирование механических приборов и систем. Учебное пособие. – М.: “Высшая школа”, 1991. -383с.
8. В.З. Гребенкин, А.А. Дегтярев, А.И. Погалов. Проектирование механических передач с гибкими звеньями, винтовых и мальтийских механизмов. Учебное пособие. /Под ред. д.т.н. проф. В.З. Гребенкина. – М.: МИЭТ, 1995. – 145с.
9. О.А. Ряховский, С.С. Иванов. Справочник по муфтам. – Л.: Политехника, 1991. – 285с.

Лекция 23. ОПОРЫ И НАПРАВЛЯЮЩИЕ

Опорами называются устройства, поддерживающие вращающиеся детали в заданном положении. Опоры являются кинематическими парами, они способны воспринимать нагрузки со стороны подвижных звеньев. Части валов и осей, охватываемые опорами, называются цапфами, а детали опор, охватывающие цапфы, называются подшипниками. При действии осевых нагрузок цапфы называются пятами, а подшипники - подпятниками.

По характеру трения между рабочими элементами цапф и подшипников различают: опоры с трением скольжения (подшипники скольжения); опоры с трением качения (подшипники качения); специальные опоры (электромагнитные, опоры с трением упругости).

Направляющими называются устройства, обеспечивающие поступательное движение подвижного звена. Различают направляющие с трением скольжения, с трением качения и с упругими элементами.

Основными требованиями, предъявляемыми к опорам и направляющим точных механизмов, являются: высокая точность направления, малый момент трения, высокая износостойкость, обеспечение надежной работы в условиях вибраций, ускорений и в агрессивных средах, простота изготовления и сборки.

23.1. Подшипники скольжения

В большинстве случаев подшипники скольжения (рис. 23.1) состоят из корпуса 1, вкладышей 2 и смазывающих устройств 3. Вкладыши являются основными элементами подшипников, форма их рабочей поверхности определяется формой цапфы - обычно цилиндрической. Конструкции подшипников разнообразны и зависят от конструкции машины.

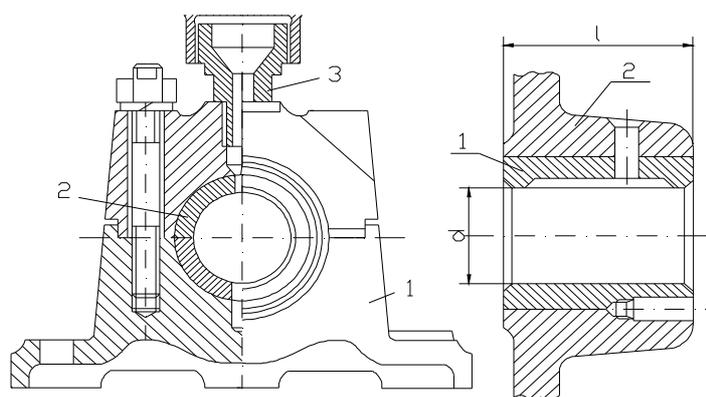


Рис. 23.1

В простейшем виде подшипник скольжения представляет собой втулку (вкладыш) 1 (рис. 23.2), встроенную в корпус машины 2. Такие подшипники применяются в основном в малонагруженных механизмах. Размеры подшипниковых втулок стандартизованы [1].

Подшипники скольжения делятся на неразъёмные (рис. 23.2) и разъёмные (рис. 23.1). Последние применяют для удобства монтажа и эксплуатации.

Неразъёмные (глухие) подшипники применяют при малой скорости скольжения, при работе с перерывами (механизм управления др.).

Разъёмные подшипники имеют основное применение в тяжело нагруженных механизмах.

При большой длине цапф применяют самоустанавливающиеся подшипники (рис. 23.3). Сферические выступы вкладышей позволяют им самоустанавливаться для устранения перекосов вследствие деформации вала и неточностей монтажа, обеспечивая равномерное распределение нагрузки в подшипнике.

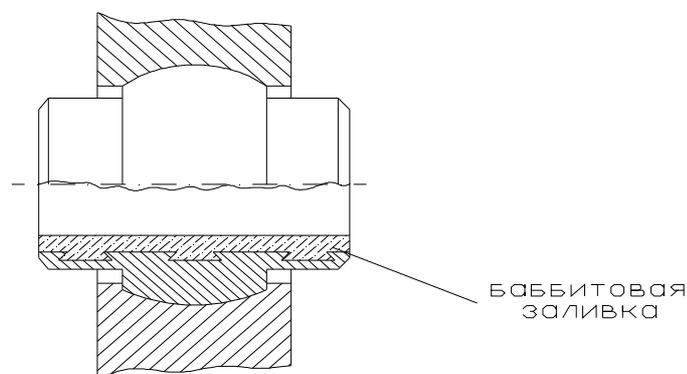
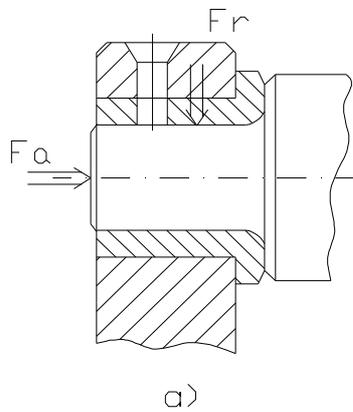


Рис. 23.2

Подшипники, одновременно воспринимающие радиальную F_r и осевую F_a нагрузки, показаны на рис. 23.4. Конструкция подшипника, показанного на (рис. 23.4, б) позволяет при сборке регулировать положение валика в осевом направлении. Пример конструкции подпятника показан на рис. 23.5.



а)

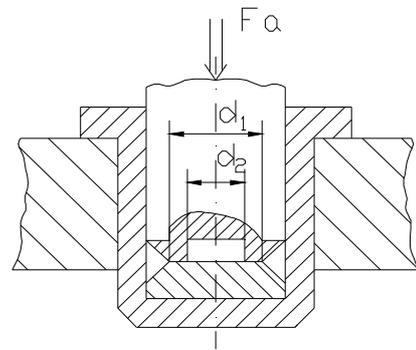


Рис. 23.5

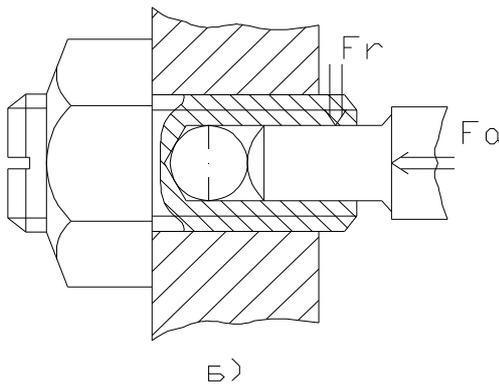


Рис. 23.4

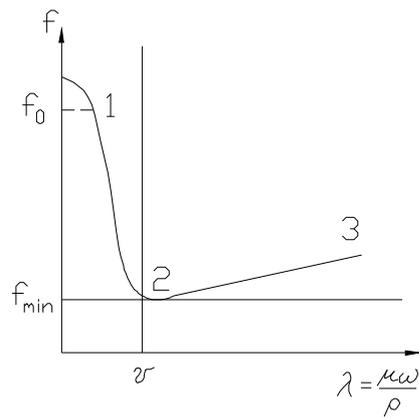


Рис. 23.6

В процессе работы трущиеся поверхности цапфы и вкладыша находятся в состоянии относительного скольжения. Важнейшие эксплуатационные характеристики опор скольжения - несущая способность и потери на трение. Для радиальных подшипников скольжения сила трения

$$F_{mp} = F_r f, \quad (23.1)$$

где порядок F_r радиальной нагрузки; f – коэффициент трения скольжения.

Изменение величин f в подшипниках скольжения может быть иллюстрировано диаграммой Герси-Штрибена (рис. 23.6). При весьма малой угловой скорости вала w основным аргументом, определяющим значение f , является скорость скольжения $u = wr$. При этом смазочная пленка очень тонка и составляет примерно 0,1 мкм, коэффициент трения изменяется незначительно $f = f_0 = 0.1 - 0.3$. Трения в указанных условиях называется граничным.

С возрастанием u величина f быстро убывает (участок 1-2 рис. 23.6), до $f = 0.02 - 0.06$. Хотя толщина смазочного слоя при этом возрастает, отдельные выступы шероховатых поверхностей вала и подшипника скольжения соприкасаются - трение в таких условиях называют полужидкостным. Здесь наиболее существенно проявляется влияние материала вкладыша, определяющего как допускаемую удельную нагрузку, так и предельную быстроходность опоры.

При дальнейшем увеличении u график изменения f строит в зависимости от безразмерной характеристики режима работы

$$l = \frac{mw}{p}, \quad (23.2)$$

где w - угловая скорость вала; m - динамическая вязкость смазки; p - среднее удельное давление, приходящееся на единицу проекции опорной поверхности.

С возрастанием l толщина смазочного слоя возрастает, шероховатости цапфы вала R_{z1} и поверхности вкладыша R_{z2} разделяются (рис. 23.7,а), возникает режим жидкостного трения. Он характеризуется коэффициентом трения $f = 0.005 - 0.001$ и минимально возможным износом вала и вкладыша. При этом за счет затягивания смазки в клин между рабочими поверхностями (рис. 23.7,б) возникает гидродинамическое давление p .

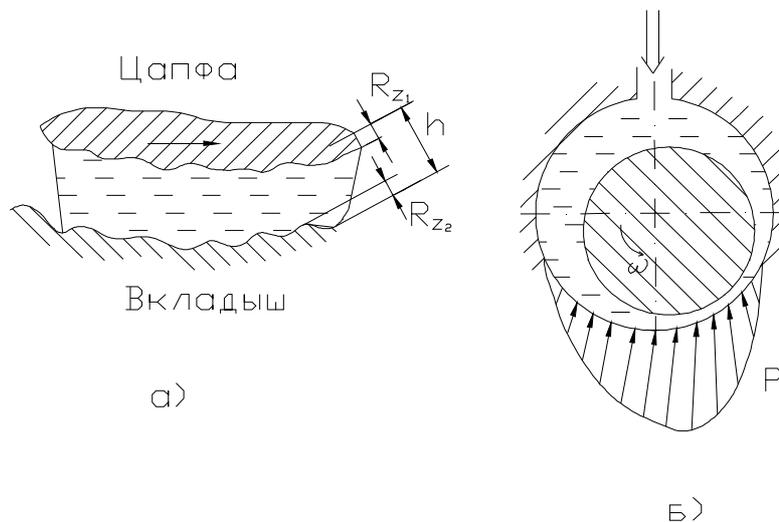


Рис. 23.7

Опоры с газовой смазкой обеспечивают еще меньшую величину коэффициента трения $f \leq 0.001$, но при этом не допускают высоких нагрузок на несущую газовую пленку (до 0,4-0,5 МПа), В таких опорах требуется особо высокая точность геометрии сопряженных поверхностей, жестко регламентированные зазоры.

Подшипники скольжения по характеру трения, конструктивным и эксплуатационным признакам подразделяются следующим образом:

- 1) подшипники сухого трения (из самосмазывающихся материалов);
- 2) полужидкостного трения;
- 3) гидростатические;
- 4) гидродинамические;
- 5) сегментные подшипники;
- 6) разостатические;
- 7) газодинамические подшипники
- 8) магнитные и электромагнитные и др.

В технологическом оборудовании электронной техники чаще всего применяются подшипники сухого, полужидкостного трения, а также газостатические подшипники,

К материалам вкладышей подшипников скольжения предъявляются требования высокой износостойкости, высокой сопротивляемости заеданию, низкого коэффициента трения и высокой теплопроводности с малым расширением.

Для вкладышей применяют следующие материалы: оловянистые бронзы Бр0Ф10-1, Бр0ЦС6-6-3, безоловянистые бронзы БрАЖ9-4, БрС30 (при закаленных цапфах валов), чугуна СЧ15-32, АСЧ-1. Баббиты Б83, Б89 хорошо прирабатываются, обладают высокой стойкостью к заеданию, но имеют низкую прочность; их за-

ливают тонким слоем на рабочую поверхность вкладыша (см. рис. 23.3). Кроме того, для вкладышей используется металлокерамика: бронзографит, железографит, графит, и синтетические материалы: текстолит, полиамидные пластмассы, полиформальдегид, фторопласт.

В качестве смазки в жидкостном или полужидкостном режимах работы применяются жидкие минеральные, реже синтетические масла. В подшипниках сухого трения применяются порошки графита, двусернистого молибдена, нитрата бора, диселенида или детеллурида молибдена. Применяются различные виды покрытий вкладышей - сульфидирование, сульфоцианирование, нанесение пленок свинца, галлия, палладия, серебра, золота; наполненные фторопласты. Наиболее частыми видами разрушения подшипников скольжения являются абразивное изнашивание, заедание и усталостное разрушение.

Точный расчет подшипников скольжения в режиме жидкостного трения выполняется на основе гидродинамической теории смазки.

Для подшипников скольжения в режиме полужидкостного трения расчет при радиальной нагрузке F_r (Н) выполняется по приближенным формулам на ограничение удельного давления p (МПа), а также на ограничение нагрева и износа, пропорционального показателю удельной работы трения pu (МПа-м/с), причем

$$p = \frac{F_r}{dl} \leq [p]; \quad (23.3)$$

$$u = \frac{pdn}{60 \cdot 1000}; \quad (23.4)$$

$$pu \leq [pu]; \quad (23.5)$$

где d и l - диаметр и длина рабочих поверхностей опоры, мм (см. рис. 23.2); n - частота вращения вала, об./мин. Допускаемые значения $[pu] = 2 - 15$ МПа-м/с зависят от условий эксплуатации.

Расчет подпятников скольжения, воспринимающих осевую нагрузку F_a при кольцевой поверхности трения с размерами d_1 и d_2 (см. рис. 23.5), выполняется по формулам:

$$p = \frac{4F_a}{p(d_1^2 - d_2^2)} \leq [p]; \quad (23.6)$$

$$u_{cp} = \frac{p(d_1 - d_2)n}{20 \cdot 60 \cdot 1000}; \quad (23.7)$$

$$pu_{cp} \leq [pu]. \quad (23.8)$$

Моменты трения в подшипниках и подпятниках скольжения определяются зависимостями $M_{тр}$:

$$M_{тр} = 1.27F_r fr; \quad (23.9)$$

$$M_{тр} = 0.33F_a \frac{d_1^3 - d_2^3}{d_1^2 - d_2^2}, \quad (23.10)$$

где $r = 0.5d$.

Сопряжение рабочих поверхностей цапфы вала и подшипника осуществляется обычно в системе основного отверстия. Применяются посадки $H6/g5$, $H7/g6$, $H8/f8$, $H7/e8$, $H8/d9$ и др. Минимальная величина зазора между цапфой и втулкой подшипника равна

$$h_{\min} = (2 - 3)(R_{z1} - R_{z2}), \quad (23.11)$$

где R_{z1} и R_{z2} - высоты неровностей сопрягаемых поверхностей.

Шероховатость поверхности цапфы должна быть $R_a = 1,25-0,32$ мкм. Основными преимуществами подшипников скольжения являются: возможность работы в агрессивных средах, в том числе в воде; широкий диапазон температур; надежность работы в высокоскоростных приводах; бесшумность; малые радиальные размеры; разборка по осевой плоскости.

К недостаткам подшипников скольжения относятся: сравнительно большие осевые размеры; значительные потери на трение при несовершенной смазке; большой расход смазки; перегрев.

В настоящее время разработаны металлофторопластовые подшипники, новые антифрикционные материалы, в частности, шарикопласт. Основным направлением снижения потерь на трение является разработка опорных узлов с трением качения.

23.2. Подшипники качения

Подшипник качения представляет собой стандартный узел, основщик моментами которого являются тела качения 1 (рис. 23.8, а) -шарики или ролики, установленные между кольцами - наружным 2 и внутренним 3, и удерживаемые на определенном расстоянии друг от друга обоймой 4, называемой сепаратором.

В процессе работы тела качения катятся по беговым дорожкам колец. Основными размерами подшипника качения (рис. 23.8, а) являются внутренний диаметр d , наружный диаметр D , ширина B .

Подшипники качения широко распространены во всех отраслях машиностроения, они стандартизованы и изготавливаются на специализированных заводах.

К преимуществам подшипников качения относятся: сравнительно невысокая стоимость вследствие их массового производства; малые потери на трение и незначительный нагрев; малая разница момента трения при пуске и в установившемся режиме; высокая степень взаимозаменяемости.

Недостатками подшипников качения являются высокая чувствительность к ударным и вибрационным нагрузкам вследствие большой жесткости конструкции подшипника, сравнительно большие радиальные размеры, пониженная нагрузочная способность, невозможность работы в агрессивных средах и воде.

По форме тел качения различают шариковые (рис. 23.8) и роликовые (рис.23.9) подшипники, причем последние могут быть с цилиндрическими, коническими, бочкообразными, игольчатыми и витыми роликами. По направлению воспринимаемой нагрузки подшипники бывают радиальные, радиально-упорные и упорные, по числу рядов тел качения - однорядные и многорядные, по способности самоустанавливаться - несамоустанавливающиеся и самоустанавливающиеся (сферические) . Для каждого типа подшипника при одном и том же внутреннем диаметре имеются различные серии (отличающиеся размерами колец наружного диаметра подшипника), а именно: сверхлегкие, особо легкие, легкие, средние, тяжелые.

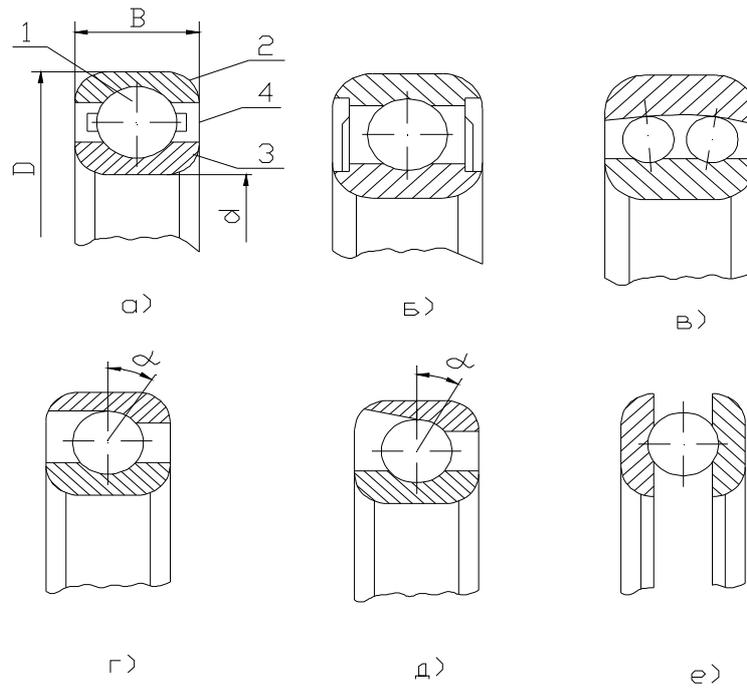


Рис. 23.8

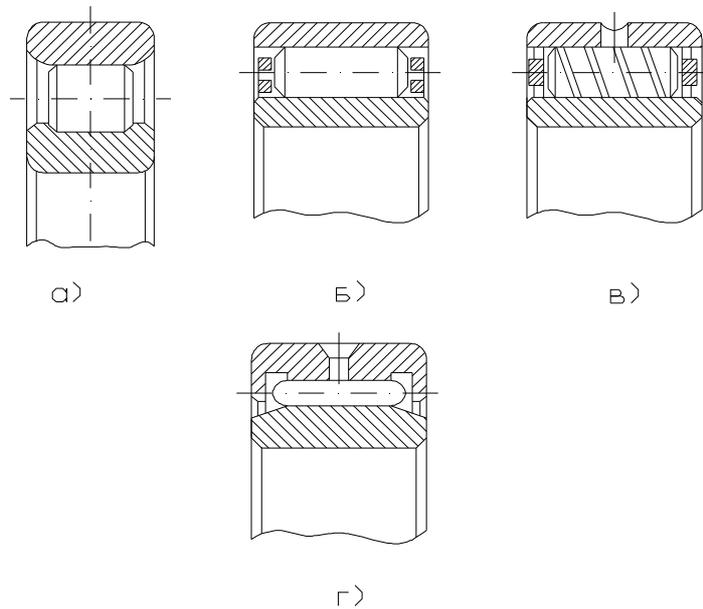


Рис. 23.9

В зависимости от ширины подшипника серии подразделяют на узкие, нормальные, широкие и особо широкие.

В электронном машиностроении рекомендовано применение шариковых подшипников особо легкой, легкой и средней серий.

Шариковый радиальный однорядный подшипник (рис. 23.8, а, б) является самым распространенным подшипником в машиностроении. Он допускает перекосы вала до $1/4^\circ$, предназначен для радиальной нагрузки, но может воспринимать и осевую в пределах 70% от недоиспользованной радиальной, обеспечивает осевое фиксирование вала в двух направлениях. Радиальный однорядный шарикоподшипник может выполняться с одной или двумя защитными шайбами, что позволяет отказаться от уплотняющих устройств в узле, в подшипник с двумя защитными шайбами смазку закладывают на заводе-изготовителе, при этом срок службы его зависит от срока службы смазки.

Шариковые радиальные сферические подшипники (рис. 23.8, в) предназначены для восприятия радиальной нагрузки. Одновременно с радиальной - они могут воспринимать небольшую осевую нагрузку и работать при значительном перекосе (до $2-3^\circ$) внутреннего кольца относительно наружного. Область применения их обусловлена способностью самоустанавливаться.

Шариковые радиально-упорные подшипники (рис. 23.8, г, д) предназначены для комбинированных (радиальных и осевых) нагрузок. Подшипники, смонтированные попарно, воспринимают осевые усилия, действующие в обоих направлениях. Они применяются для жестких валов при больших скоростях вращения. Подшипники выпускаются с различной величиной угла контакта $\alpha = 12, 26$ или 36° .

Шариковые упорные подшипники (рис. 23.8, е) воспринимают одностороннюю осевую нагрузку. При действии осевых сил попеременно в обоих направлениях устанавливают двойные упорные подшипники.

Роликовые подшипники качения обладают повышенной нагрузочной способностью по сравнению с шарикоподшипниками. Основные их типы показаны на рис. 23.9.

Тела качения и кольца изготавливают из высокопрочных шарикоподшипниковых хромистых сталей ШХ9, ШХ15 с термообработкой и последующим шлифованием и полированием. Детали шарикоподшипников специального назначения могут изготавливаться из специальных материалов, например из нержавеющей стали. Сепараторы чаще всего штампуют из мягкой листовой стали. Для высокоскоростных ша-

рикоподшипников сепараторы изготавливают массивными из бронзы, латуни, легких сплавов или пластмасс.

23.3. Расчет подшипников качения

Основными причинами выхода подшипников качения из строя являются усталостное выкрашивание после длительного времени их работы в нормальных условиях и остаточные деформации на беговых дорожках - лунки, вмятины.

В настоящее время подшипники качения рассчитываются на статическую грузоподъемность по остаточным деформациям и на срок службы по усталостному выкрашиванию (расчет на выносливость).

Расчет на статическую грузоподъемность ведется по условию

$$c_0 = f_s P_0 \leq [c_0], \quad (23.12)$$

где f_s - коэффициент надежности; P_0 - эквивалентная статическая нагрузка, Н; $[c_0]$ - допускаемая статическая грузоподъемность, Н, под которой понимается статическая нагрузка, которой соответствует остаточная деформация тел качения и колец в наиболее нагруженной точке, равная 0,0001 диаметра тел качения. Значения $[c_0]$ приводятся в таблицах, технических характеристик подшипников качения (см. например [3]).

Эквивалентная статическая нагрузка

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a \quad (23.13)$$

где X_0 и Y_0 - коэффициенты радиальной и осевой нагрузки (см. 3,4); F_r и F_a - радиальная и осевая нагрузки на подшипник, Н.

Расчет подшипников качения на выносливость заключается в определении динамической грузоподъемности c и сравнении этой величины с допустимым значением $[c]$ для данного подшипника.

$$c \leq [c]. \quad (23.14)$$

Допустимая динамическая грузоподъемность представляет собой постоянную радиальную нагрузку, которую подшипник с невращающимся наружным кольцом может выдержать в течение одного миллиона оборотов внутреннего кольца подшипника без появления признаков усталости материала, значения $[c]$ приведены в таблицах технических характеристик подшипников качения [3.4]. динамическая грузоподъемность c (Н) и долговечность подшипника L (измеряемая в миллионах оборотов) связаны эмпирической зависимостью, для шариковых подшипников реющей вид

$$c = P\sqrt[3]{L} \quad (\text{Н}), \quad (23.15)$$

где P – эквивалентная нагрузка, Н.

Долговечность, выражается в часах, обозначается L_h , при этом

$$L = 60nL_h 10^{-6}, \quad (23.16)$$

где n - частота вращения вала, об./мин.

Величина эквивалентной нагрузке P равна

$$P = (VXF_r + YF_a)k_\sigma k_t \quad (\text{Н}), \quad (23.17)$$

где V - коэффициент вращения, зависящий от того, какое кольцо подшипника вращается; при вращении внутреннего кольца (в редукторах) $V = 1$, наружного $V = 1,2$; X, Y - коэффициенты радиальной и осевой нагрузок, указаны в таблицах [3]; F_r, F_a - радиальная и осевая нагрузки, Н; k_σ - коэффициент безопасности, учитывающий динамический характер нагрузки (в случае постоянной нагрузки $k_\sigma = 1$, переменной $k_\sigma = 1,3-1,8$, ударной $k_\sigma = 2-3$); k_t - температурный коэффициент, при $t \leq 125^\circ\text{C}$ $k_t = 1$, при $t = 125-250^\circ\text{C}$ $k_t = 1,05-1,4$.

Максимальная быстроходность подшипника ограничивается указанное в таблицах технических характеристик предельной частотой вращения.

При определении расчетной осевой нагрузки F_a для радиально-упорных подшипников учитывают дополнительные нагрузки F'_a , которые возникают от радиальной нагрузки F_r при угле контакта α (рис. 23.8, г).

Для шариковых радиально-упорных подшипников

$$F'_a = eF_r, \quad (23.18)$$

где e – параметр осевого нагружения, величина которого определяется [3] в зависимости от отношения F_a/c_0 . Полученную величину F'_a алгебраически суммируют с величиной осевой нагрузки F_a . Примеры выбора и расчёта подшипников качения приведены в [3.6].

23.4. Смазка подшипников качения. Работа подшипников в вакууме

В подшипниках качения смазка уменьшает трение, шум, отводит тепло, защищает подшипник от коррозии, заполняет зазоры в уплотнениях, обеспечивая герметизацию подшипникового узла. Для смазки подшипников качения применяют жидкие, пластичные (консистентные) и твердые смазки.

Жидкие смазки используют для подшипников при окружной скорости вала выше 10 м/с. Чаще всего применяются минеральные масла; МВП (приборное), промышленное 12 (веретенное), промышленное 20, МК-8. Возможно использование смесей масел, а также масел с антифрикционными присадками (графит, дисульфид молибдена).

Пластичные смазки используются для подшипников при окружной скорости вала до 10 м/с. Корпус подшипникового узла заполняют смазкой в объеме 1/3 его свободного пространства. Наилучшими признаны литиевые смазки: ЛИТОЛ-24, ФИОЛ-2У, ЦИАТИМ-221, ЦИАТИМ-201, ВНИИ НП-260.

Твердые смазки используются в вакууме и специальных средах. Применяются дисульфид молибдена, нитрат бора, покрытия мягкими металлами, графит.

В вакуумных камерах технологического оборудования микроэлектроники подшипники качения работают в условиях высокого вакуума (давление 10^{-7} Па и ниже) и повышенных температур (300-400°C), необходимых для обезгаживания камер.

Как правило, кольца подшипников качения покрывают тонкими пленками металлов с высокой адгезией к стали ШХ15 и малым сопротивлением сдвигу (свинец, серебро, золото, индий, галлий, палладий). Недостатками такого вида твердых смазок являются быстрый износ пленок малой толщины (2-5 мкм) и невысокая адгезия более толстых пленок.

В диапазоне температур 140-275°C возможно применение массивных сепараторов из самосмазывающихся пластмасс. В этом случае применяются ТЕСАН-4, ФН-202, ТЕСАН-6, ВИЛАН, наполненные фторопласты. Ресурс работы подшипников качения с сепараторами из самосмазывающихся пластмасс определяется временем до повреждения перемычек сепаратора и заклинивания подшипников. Применение твердых смазок вызывает повышенные энергетические потери.

23.5. Точность и посадки подшипников качения

Подшипник обладает полной внешней взаимозаменяемостью по присоединительным поверхностям. Внутренняя взаимозаменяемость тел качения и колец подшипника неполная: для обеспечения высокой точности сопряжений элементов в подшипнике применяется селективная сборка. Основными показателями точности подшипников качения являются точность размеров присоединительных поверхностей, точность формы и расположения, а также степень шероховатости поверхностей дорожек качения колец и тел качения в одном подшипнике.

СТ СЭВ 774-77 устанавливает следующие классы точности подшипников качения (в порядке повышения точности): 0, 6, 5, 4, 2. Класс точности указывается цифрой перед условным обозначением подшипника, например 6-200. Класс 0 не указывается.

На сборочном чертеже (рис. 23.10, а) подшипникового узла проставляются обозначения полей допусков деталей, сопряженных с подшипником, т.е. вала и отверстия в корпусе. Расположение полей допусков вала и посадочного отверстия внутреннего кольца подшипника показаны на рис. 23.10, б, отверстия в корпусе и наружного кольца - на рис. 23.10, в.

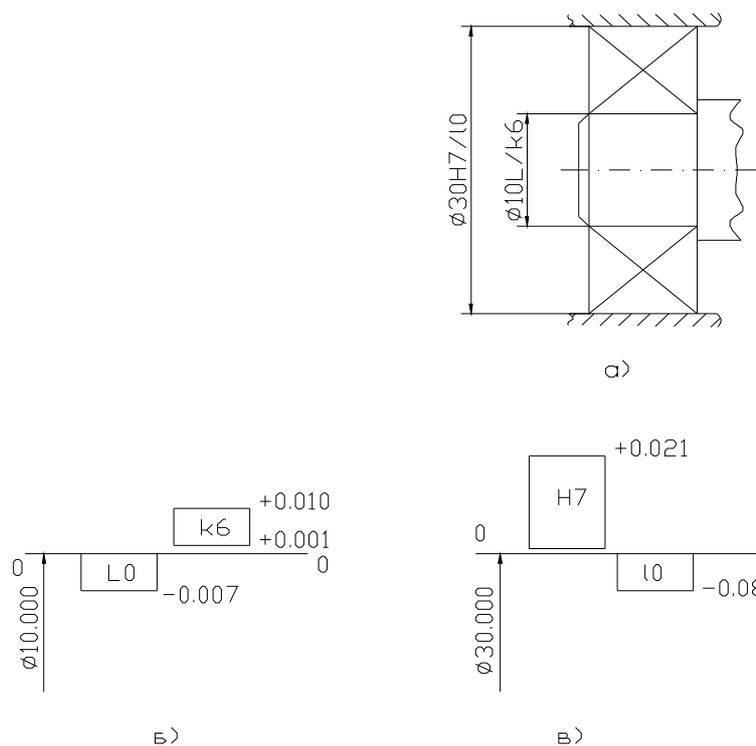


Рис. 23.10

Так как подшипник является стандартным узлом, то посадка его внутреннего кольца на вал осуществляется всегда в системе отверстия, а наружного кольца в корпус - в системе вала. Однако поле допуска на диаметр d отверстия внутреннего кольца расположено не "в тело", как у основного отверстия, а вниз от нулевой линии

(рис. 23.10, б). Это позволяет получить посадки с небольшим натягом, используя для валов стандартные поля допусков переходных посадок.

Подшипники качения маркируют нанесением на торец колец ряда цифр, условно обозначающих внутренний диаметр, серию, тип, конструктивные особенности, класс точности и др.

Две первые цифры, справа обозначают внутренний диаметр подшипника d . При $d \leq 20$ мм размер внутреннего диаметра определяется умножением указанных двух цифр на 5.

Третья цифра справа обозначает серию подшипника: 1 - особо легкая серия, 2 - легкая, 3 - средняя и т.д.

Четвертая цифра справа обозначает тип подшипника, пятая и шестая цифры - отклонение конструкции подшипника от основного типа. Класс точности, как ука-

зывается выше, обозначается цифрой, поставленной через тире перед условным обозначением подшипника качения. Например, подшипник 36205 - радиально-упорный шариковый подшипник легкой серии класса точности 0 с внутренним диаметром $d = 25$ мм и углом контакта 12° , подшипник 5-101 - радиальный шариковый подшипник особо легкой серии класса точности 5 с внутренним диаметром $d = 12$ мм.

23.6. Специальные подшипники качения

Помимо стандартных подшипников качения, в точном машиностроении и приборостроении применяются специальные подшипники качения, выполненные с отступлением от требований ГОСТ 520-71 (изготавливаются из специальных материалов и содержат нестандартные детали). Кроме того, используются подшипники, изготовленные специально для технологических установок. Различают специальные шарикоподшипники - скоростные, чувствительные, миниатюрные.

Скоростные подшипники используются в качестве опор валов и осей, вращающихся с частотой вращения 10000 об./мин и более, применяются в центрифугах, гироскопических устройствах и других приборах. Скоростные подшипники имеют весьма высокую точность геометрической формы деталей, малый момент трения, массивную конструкцию сепаратора, изготавливаемого из текстолита, бронзы, латуни. Применяются подшипники 5,4 и 2 классов точности.

Чувствительные подшипники устанавливаются на валах и осях, точность вращения которых зависит от момента трения в опорах, с его уменьшением уменьшается зона нечувствительности. К чувствительным подшипникам предъявляются те же требования по точности, что и к скоростным подшипникам качения. Отличие состоит в конструкции сепараторов, которые выполняются более легкими. В чувствительных подшипниках всегда должен быть радиальный зазор. Для уменьшения момента трения используются: смазка, имеющая малую вязкость; обкатка и приработка подшипников; принудительная вибрация опор; относительное перемещение подшипников и цапф.

В приборах применяют миниатюрные шарикоподшипники с наружным диаметром от 1 до 8 мм (рис. 23.11), которые могут воспринимать нагрузку до 20 Н

при частоте вращения вала $n = 100$ об./мин. Момент трения в таких подшипниках очень мал (до 0,01 Н·мм и менее).

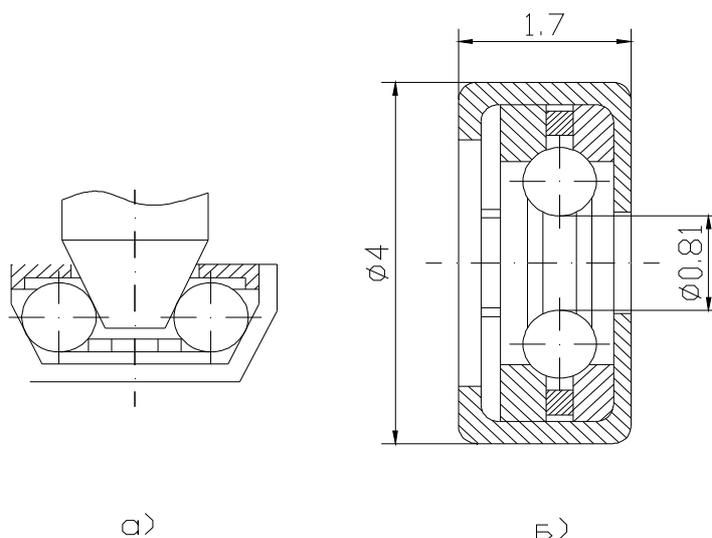


Рис. 23.11

23.7. Направляющие с трением скольжения

Направляющие скольжения просты по конструкции, обладают достаточной жесткостью, способны воспринимать ударную нагрузку. Основными недостатками направляющих скольжения являются большие потери на трение, износ, трудность обеспечения плавности и точности медленных перемещений.

Конструктивно направляющие скольжения выполняются с силовым замыканием - открытые (рис. 23.12, а), и с геометрическим замыканием - закрытые (рис. 23.12, б).

По форме рабочих поверхностей различают призматические (рис. 23.12, в), плоские (рис. 23.12, г) и цилиндрические (рис. 23.12, б) направляющие.

Важнейшей характеристикой условий работы направляющих скольжения является резким трением. В зависимости от условия работы, типа смазки и маслораспределения направляющие могут работать в условиях сухого, граничного, полужидкостного, жидкостного гидродинамического, жидкостного гидростатического или газового трения. Изменение коэффициента трения в направляющих скольжения также может быть проиллюстрировано диаграммой Герси-Штрибека (см. рис. 23.6), характеристика режима работа I определяется по формуле (23.2).

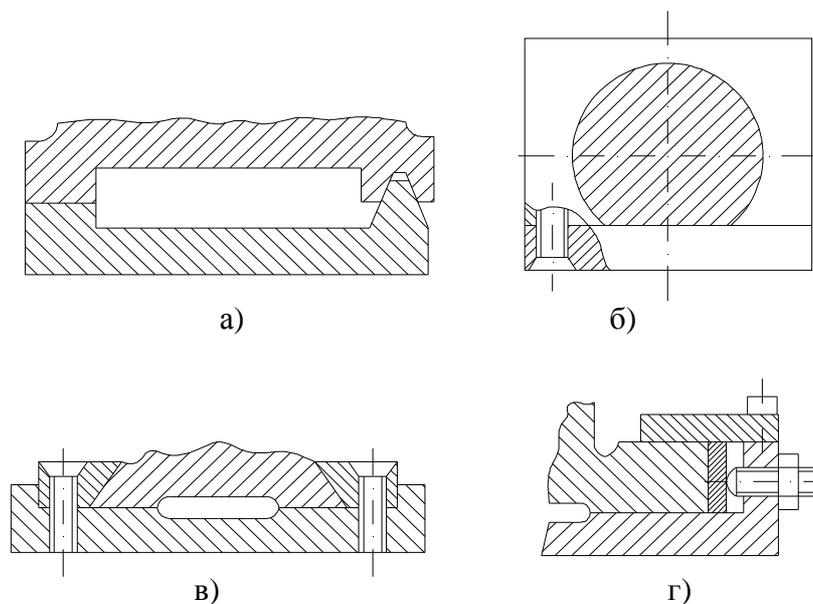


Рис. 23.12

От сил трения зависят плавность и легкость движения ползуна (каретки) по направляющим. Для уменьшения сил трения и предотвращения заклинивания (самоторможения) ползуна в направляющих необходимо соблюдать определенную зависимость между силами, приложенными к ползуну, коэффициентом трения и размерами ползуна и направляющих. Для направляющих с эксцентрично приложенной движущей силой P (рис. 23.13, а), а также для направляющих с малой длиной ползуна и большой шириной направляющих (рис. 23.13, б) зависимость между величинами движущей силы P и силы полезного сопротивления Q имеет вид:

$$P = \frac{Q}{1 - 2f \frac{l}{L}}, \quad (23.19)$$

где f - коэффициент трения скольжения; l - эксцентриситет нагрузки; L - расстояние между опорными точками на ползуне.

Условие $P = \infty$ - соответствует заклиниванию ползуна, откуда можно получить допустимое соотношение между величинами l и L :

$$\frac{l}{L} \leq \frac{1}{2fk}, \quad (23.20)$$

где k - коэффициент запаса против заклинивания; при $f = 0,2$, $k = 5$ - для плоских призматических направляющих; $k = 6,5$ - для цилиндрических направляющих; $k = 10$ - для направляющих типа "ласточкин хвост".

Если движущая сила приложена под углом g к оси симметрии направляющих (рис. 23.13, в), то между величинами движущей силы и силы полезного сопротивления существует зависимость

$$P = \frac{Q}{\cos g - f(1 + 2 \frac{l}{L}) \sin g}, \quad (23.21)$$

а критическая величина угла g (называемого углом давления) равна

$$\operatorname{tg} g = \frac{1}{f(1 + 2 \frac{l}{L})} \quad (23.22)$$

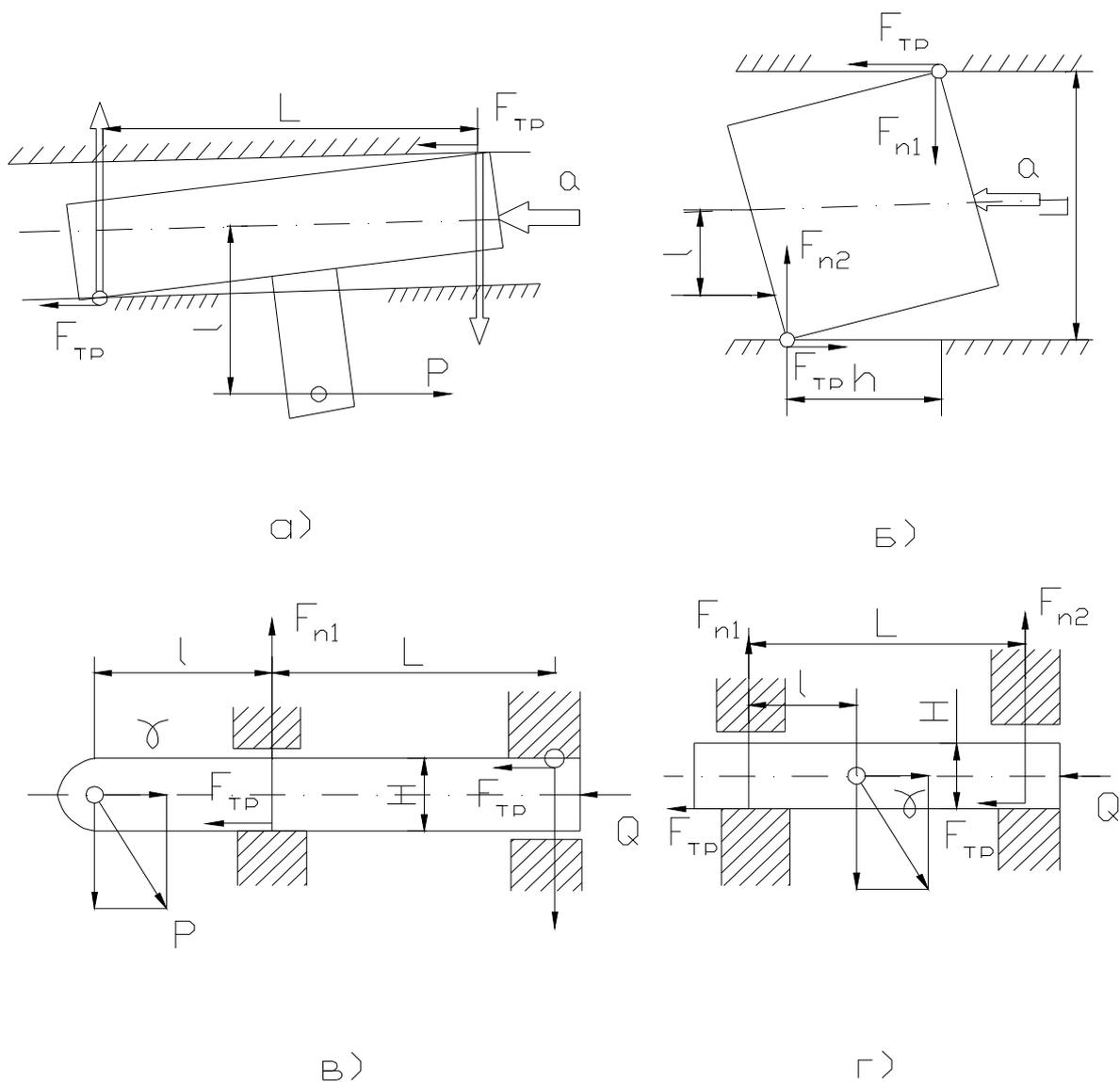


Рис. 23.13

Для направляющих, изображенных на рис. 23.13, в наибольший угол давления $g \leq 30^\circ$.

Если точка приложения движущей силы находится в пределах направляющих (рис. 23.13,г), то $\operatorname{tg} g = \frac{1}{f}$ а наибольший угол давления $g \leq 45^\circ$.

Анализ полученных зависимостей показывает, что для уменьшения сил трения и износа направляющих необходимо уменьшать отношение $\frac{l}{L}$, располагать точки приложения движущих сил и сил сопротивления как можно ближе к оси симметрии направляющих и выбирать угол давления g как можно меньше.

Силы трения зависят от коэффициента трения f и нормального давления F_n на рабочих поверхностях направляющих. Рассмотрим перемещение ползуна по призматической направляющей (рис. 23.14). При равномерном движении

$$P = F_{mp} = f(F_{n1} + F_{n2}) \quad (23.23)$$

Величины нормальных реакций F_{n1} и F_{n2} определяются из условия равновесия подвижной детали

$$F_{n1} = \frac{Q}{\cos b_1(1 + \operatorname{tg} b_1 / \operatorname{tg} b_2)} \quad \text{и} \quad F_{n2} = \frac{Q}{\cos b_2(1 + \operatorname{tg} b_2 / \operatorname{tg} b_1)} \quad (23.24)$$

Тогда сила трения

$$F_{mp} = Qf \frac{\sin b_1 + \sin b_2}{\sin(b_1 + b_2)} = Qf_{np}, \quad (23.25)$$

где $f_{np} = f \frac{\sin b_1 + \sin b_2}{\sin(b_1 + b_2)}$ - приведённый коэффициент трения.

Для направляющей с гранями, наклоненными под углом $b = b_1 = b_2$, $f_{np} = f / \cos b$.

При цилиндрических поверхностях ползуна и направляющей $f_{np} = 1.27 f$.

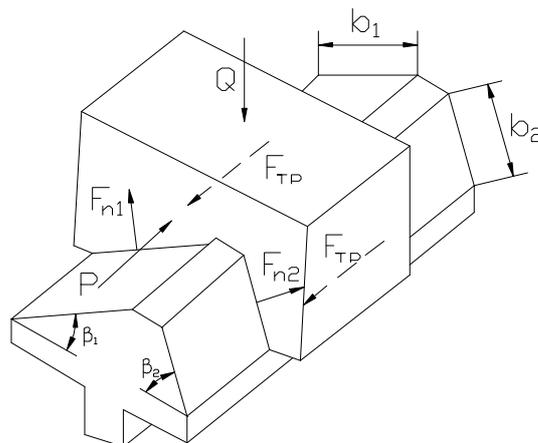


Рис. 23.14

В открытых направляющих силы трения меньше, чем в закрытых. Наибольшие силы трения действуют в направляющих типа "ласточкин хвост".

Рабочие поверхности направляющих и ползуна рассчитываются при условии ограничения удельного давления

$$p = \frac{F_n}{S} \leq [p], \quad (23.26)$$

где F_n - нормальная реакция на поверхности соприкосновения, Н; S - площадь поверхности соприкосновения, мм²; $[p]$ - допускаемое удельное давление, величина которого для пар сталь-сталь и чугун - чугун или чугун - сталь со смазкой $[p] = (0,6-0,8)$ МПа, без смазки $[p] = (0,25-0,4)$ МПа.

Для уменьшения износа обычно применяют пару из разнородных материалов; сталь - бронза, сталь - латунь. Материалом для направляющих обычно служат стали 40, 50, УВА; материалом ползуна - бронзы БрОЦС 10-2, БрОФ 10-1, латунь ЛС 59-1 и др.

Полностью избежать износа направляющих и появления зазоров невозможно. В призматических направляющих зазоры регулируются с помощью прокладок, винтов или клиньев. Недостатком цилиндрических направляющих является невозможность выборки зазора по мере износа трущихся поверхностей.

В процессе перемещения ползуна по направляющим могут возникать самовозбуждающиеся колебания, сопровождающиеся периодическими скачками и остановками. Максимальные величины скачков (0,4-1 мм) наблюдаются при скоростях скольжения $u \leq 0,005$ м/с.

Скачкообразное перемещение ползуна при малых скоростях скольжения затрудняет точную остановку, снижает точность перемещения.

Применение специальных масел является наиболее простым и эффективным средством, обеспечивающим равномерность движения. Для этой цели в станкостроении широко используется масло ВНИИ НП - 401 ГОСТ 11058 - 64.

Однако в электронном машиностроении из-за повышенных требований к чистоте применение масел ограничено.

Точность перемещения можно повысить аэро- или гидроразгрузкой направляющих. В оборудовании микроэлектроники чаще применяется аэро-разгрузка. Так в отечественном фотоповторителе ЭМ-522А на рабочей поверхности ползуна пре-

дусмотрены специальные канавки (рис. 23.15). Воздух под давлением p_a через щелевую диафрагму 1 попадает в канавку 2, здесь давление падает и достигает среднего значения p_k , под действием которого воздух распределяется вдоль канавки и поступает в зазор h между подвижной и неподвижной частями направляющей. Аэростатическая разгрузка может быть полной или частичной в зависимости от параметра направляющих

$$k_{\text{опт}} = \frac{p_k^{-2}}{\sqrt{3p_k^{-8} - 10p_k^{-8} + 8p_k^{-8} - 1}}, \quad (23.27)$$

где $\bar{p}_k = p_k / p_a$.

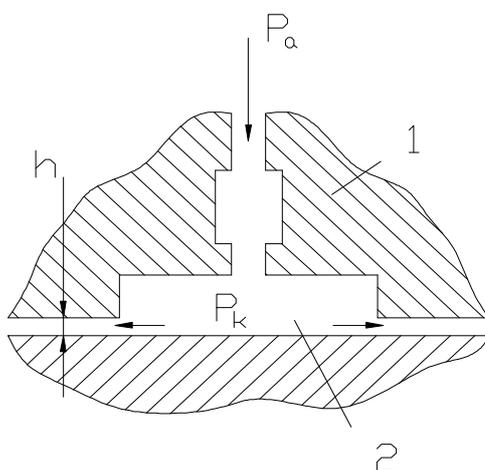


Рис. 23.15

При частичной разгрузке уменьшается нормальная сила и сила трения на поверхности контакта. При полной разгрузке поддерживающая сила уравнивает силу веса, создается режим вязкого трения, в этом случае прерывистое движение полностью исключается.

23.8. Направляющие с трением качения

Замена трения скольжения в направляющих с трением качения существенно повышает точность перемещений. При качении точки перемещенного объекта (каретка) приходят в соприкосновение с точками направляющей, при этом происходит

относительное проскальзывание этих двух тел в определенных участках контакта. Величина этого проскальзывания очень мала. Силу трения в направляющих качения, как и в подшипниках качения, можно представить в виде двух составляющих: силы трения при отсутствии нагрузки F_0 , величина которой для направляющих средних размеров составляет 4-5 Н, и силы трения, пропорциональной нагрузке,

$$F_{mp} = nF_0 + \frac{f_k}{r_{np}} F_n, \quad (23.28)$$

где n - число граней направляющей; r_{np} - приведенный радиус тел качения, мм; f_k - коэффициент трения качения: для стальных направляющих $f_k = 0,001$ мм, для чугунных $f_k = 0,025$ мм; F_n - суммарная нормальная нагрузка на направляющих.

Малые значения коэффициента f_k трения определяют и главное преимущество направляющих качения - значительно меньшие величины сил трения в пусковой момент и при движении. Для них характерны также равномерность движения при медленных перемещениях (отсутствие скачков); малые усилия перемещения; не всплывание каретки при высоких скоростях; малое тепловыделение; длительное сохранение точности перемещения.

Недостатками направляющих качения по сравнению с направляющими скольжения являются высокая стоимость, пониженная сопротивляемость ударным нагрузкам, повышенная чувствительность к загрязнениям.

По типу тел качения направляющие качения делят на шариковые (рис. 23.16), роликовые (рис. 23.17) и роликовые на осях (рис. 23.18).

Направляющие на шариках компактны, обладают большой легкостью хода, хорошо воспринимают нагрузки разных направлений. Они широко применяются в координатных столах и других устройствах технологического оборудования электронной техники.

Роликовые направляющие качения обладают значительной несущей способностью, и применяются только в тяжелых конструкциях.

В направляющих с роликами на осях частично остается трение скольжения - между торцовыми поверхностями роликов и буртиками каретки. Они применяются при малых нагрузках и больших перемещениях каретки.

Зазоры в направляющих закрытого типа (рис. 23.16, а) регулируются перемещением одной из них перпендикулярно движению каретки. В направляющих открытого типа (рис. 23.16, б) натяг осуществляется только весом узла.

Для удержания тел качения на определенном расстоянии друг от друга и предотвращения их выхода за пределы направляющих служат сепараторы. Скорость поступательного движения тел качения и соответственно сепаратора вдвое меньше скорости перемещения каретки. Поэтому длина сепаратора не равна длине направляющих в зависимости от длины хода подвижного узла.

Направляющие с трением качения обычно используют незакалённые стали 50, У8А или закаленные 40Х, ШХ15, У8А. Каретки выполняют из стали 40 или 50. При изготовлении направляющих сложного профиля применяется сталь 38ХМЮА с нитрированием плоскостей канавки. Тела качения - шарики и ролики, применяются стандартными.

Диаметр и число тел качения определяются из условий обеспечения допустимых давлений на площадке контакта. Для шариковых направляющих с точки зрения прочности выгоднее увеличивать диаметр тел качения, чем их число. Наименьшее число тел качения на одной направляющей - два. При увеличении числа тел качения уменьшаются нагрузки на площадках контакта и увеличивается неравномерность распределения нагрузки между телами качения. Наибольшее число тел качения определяется условием участия в работе всех или большинства тел качения. Для шариковых направляющих, нагруженных только силой веса (рис. 23.16, б),

$$z \leq \frac{G}{93\sqrt{d}}, \quad (23.29)$$

где G - вес узла, Н; d - диаметр шарика, мм.

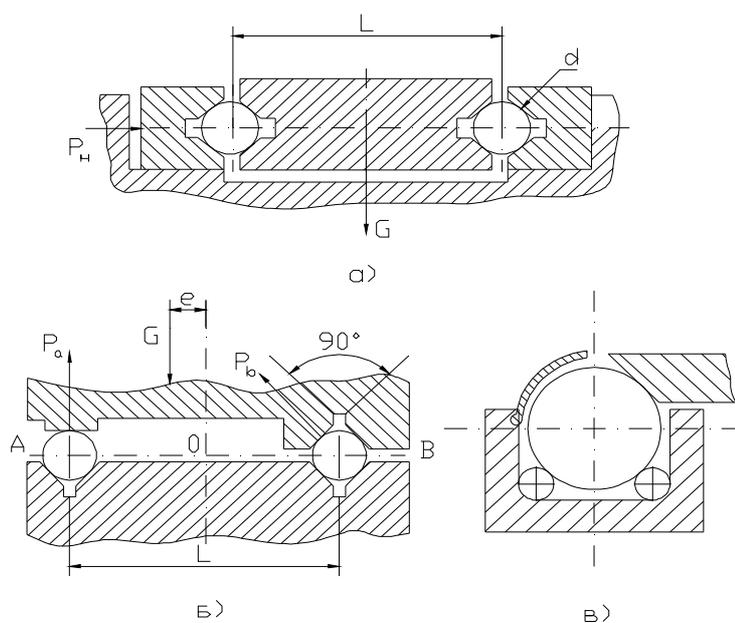


Рис. 23.16

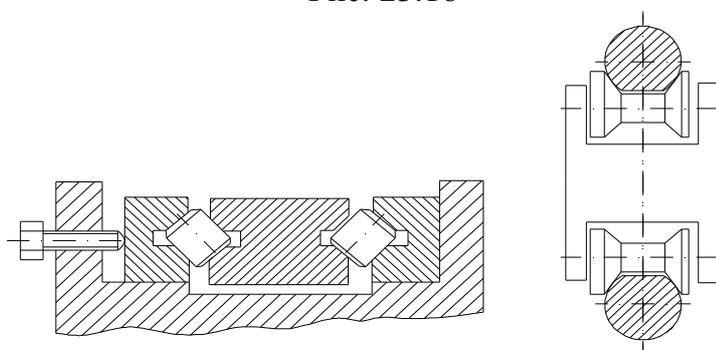


Рис.23.17

Направляющие качения рассчитываются на прочность, жесткость, долговечность по усталости (при большом числе циклов нагружения) и на сопротивление движению (по потерям на трение).

Спецификой расчета направляющих на прочность является неравномерность нагружения тел качения в связи с погрешностями изготовления направляющих и самих тел качения. Размеры направляющих, а также размеры и количество тел качения обычно назначают по опыту проектирования аналогичных конструкций. Проверку на статическую прочность можно проводить по формуле

$$P_{\max} \leq [P], \quad (23.30)$$

где P_{\max} - наибольшая нагрузка в направляющих, Н; $[P]$ - допустимая нагрузка на одно тело качения, Н.

По данным монографии [5] наибольшая нагрузка в шариковых направляющих качения открытого типа (см. рис. 23.16, б) при действии только сил веса G и усилия натяга P_n равна

$$P_{A\max} = \frac{G}{z} \left(0,5 + \frac{e}{L} \right) \quad (23.31)$$

$$P_{B\max} = 0.707 \frac{G}{z} \left(0,5 - \frac{e}{L} \right) \quad (23.32)$$

где $P_{A\max}$ и $P_{B\max}$ максимальные реакции; z - число тел качения; размеры e и l приведены на рис. 23.16.

Для направляющих закрытого типа (см. рис. 23.16, а) наибольшая нагрузка определяется по формуле

$$P_{\max} = \frac{0.707(P_n + 0,5G)}{z} \quad (23.33)$$

Допустимая нагрузка $[P]$ на один шарик для чугуновых направляющих с $HB = 190-210$ и стальных с $MRC = 58-60$ равна

$$[P] = kd^2, \quad (23.34)$$

где k - условные напряжения, отнесенные к площади сечения шариков, равные для стальных направляющих с $HRC 60$ $k = 0,4-0,6$ Мпа, для чугуновых с $HB = 200$ $k = 0,02$ МПа; d - диаметр тел качения, мм.

Для направляющих, работающих в условиях высоких нагрузок и скоростей, проверочный расчет ведут по усталостной прочности. Срок службы направляющих качения L_h (ч) определяется как

$$L_h = \frac{0.68 \cdot 10^7 d^2 t}{60nhP_{\max}^3}, \quad (23.35)$$

где t - шаг тел качения, мм; n - число ходов в минуту; h - длина хода, мм.

При расчете на сопротивление движению потери на трение определяются по формуле (23.28). Величина приведенного радиуса тел качения r_{np} для открытых шариковых направляющих (см. рис. 23.16, б) равна $r_{np} = r/1,5$, для закрытых (рис. 23.16, а) составляет $r_{np} = r/2,8$. Наиболее важными характеристиками направляющих качения координатных столов являются точность и чувствительность установочных перемещений. Точность перемещений определяется рассогласованием между движением задающего и исполнительного органов. Под чувствительностью понимается минимальная величина перемещения задающего органа, соответствующая началу движения каретки. Для шариковых направляющих при достаточной жесткости привода чувствительность лежит в пределах от 0,6 до 0,1 мкм.

Повысить точность перемещений, снизить потери на трение можно за счет повышения жесткости привода, применения специальных антискачковых масел, а также посредством подачи вынужденных ультразвуковых колебаний на направляющие и тела качения (принудительного осциллирования).

Лекция 24. СОЕДИНЕНИЕ ДЕТАЛЕЙ

Соединения деталей машин, приборов и узлов подразделяются на подвижные и неподвижные, разъемные и неразъемные. Разъемные соединения допускают многократную сборку и разборку. Разборка неразъемных соединений, производимая лишь в исключительных случаях, сопряжена с частичным разрушением соединяемых деталей или крепежных элементов.

24.1. Разъемные соединения

24.1.1 Резьбовые соединения

Резьбовые соединения, т.е. соединения деталей с использованием резьбы, наиболее широко распространены в технике. К ним относятся соединения с помощью специальных крепежных деталей: болтов (рис. 24.1,а) винтов (рис. 24.1,б), шпилек (рис. 24.1,в), а также соединения деталей непосредственным свинчиванием (соединение труб, объектива с корпусом фотоаппарата и т.п.).

Основным элементом резьбового соединения является резьба. Типы резьб, их геометрические параметры и характеристики были рассмотрены в предыдущей главе. При изготовлении крепежных изделий применяется, как правило, стандартная метрическая резьба по ГОСТ 9156-81.

Расчет болтов (винтов) на прочность

1. Расчет болтов, нагруженных осевой силой без начальной затяжки (рис. 24.2). Осевая сила F_a , действующая на болт, может вызвать смятие торцовой поверхности головки болта, срез головки болта по цилиндрической поверхности, смятие, срез и изгиб резьбы, разрыв стержня болта в опасном сечении (по внутреннему диаметру резьбы).

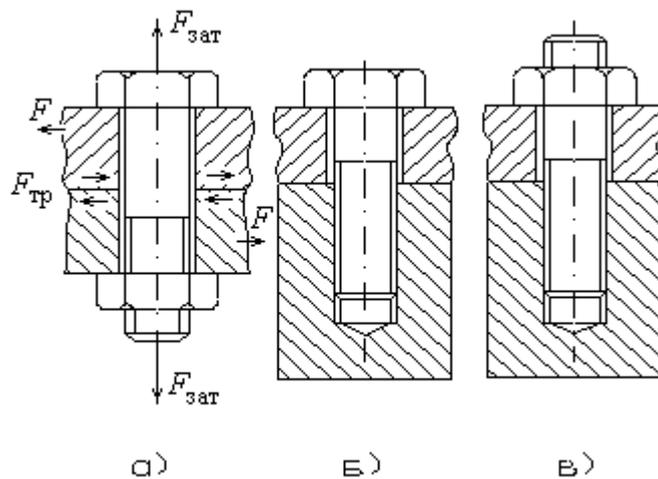


Рис.24.1.

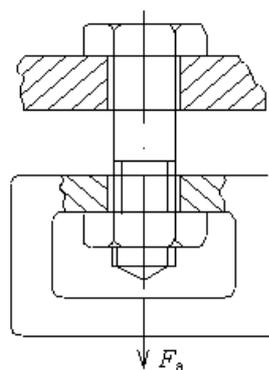


Рис. 24.2.

Стандартные крепежные изделия имеют такое соотношение размеров, что все элементы винта и резьбы обладают достаточной прочностью, если обеспечена прочность самого стержня. Условие прочности стержня болта:

$$\sigma = \frac{4F_a}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \quad (24.1)$$

2. Расчет болтов, нагруженных осевой силой с начальной затяжкой (рис. 24.3). В этом случае стержень болта растягивается осевой силой $F_{зат}$, возникающей от затяжки болта, и закручивается моментом сил трения в резьбе T_p . В стержне болта возникают нормальные напряжения σ от силы $F_{зат}$ и касательные напряжения τ от момента T_p .

$$\sigma = \frac{4F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2} \qquad \tau = \frac{T_p}{W_p} = \frac{0,5F_{\text{зат}} d_2 \text{tg}(\gamma + \rho')}{0,2d_1^3}$$

Прочность болта определяют по эквивалентному напряжению

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2}\right)^2 + 3\left[\frac{0,5F_{\text{зат}} d_2 \text{tg}(\gamma + \rho')}{0,2d_1^3}\right]^2} \leq [\sigma_p]$$

Для стандартная метрических резьб

$$\sigma_{\text{экр}} \approx 1,3\sigma = 1,3 \frac{4F_{\text{зат}}}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \qquad (24.2)$$

Требуемая величина силы затяжки $F_{\text{зат}} = A\sigma_{\text{см}}$, где A - площадь стыка деталей, приходящаяся на один болт; $\sigma_{\text{см}}$ - напряжения смятия в стыке деталей, величину которой выбирают по условиям герметичности.

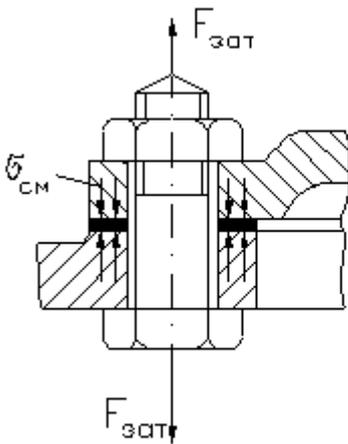


Рис.24.3

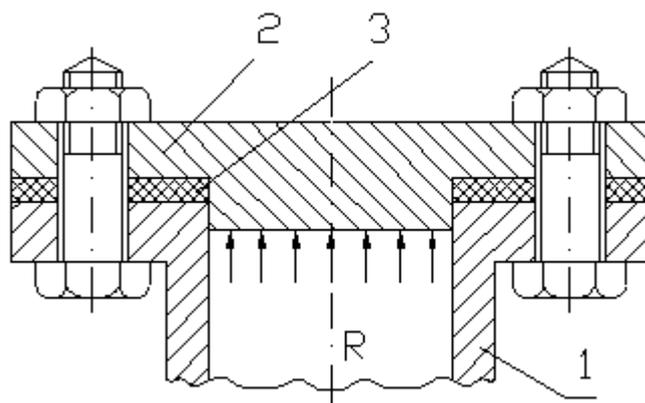


Рис.24.4

Установка болтов с начальной затяжкой широко применяется на практике для крепления герметичных крышек и люков корпусов машин, кронштейнов, корпусов к фундаменту и т.п. Более сложным является расчет затянутых болтов, предназначенных для крепления крышек резервуаров, нагруженных внутренним давлением. В этом случае внешняя нагрузка стремится раскрыть стык деталей.

Рассмотрим этот случай расчета.

3. Болт затянут, внешняя нагрузка раскрывает стык деталей (рис.24.4). Между резервуаром 1 и крышкой 2 ставится упругая прокладка 3. Затяжка болтов должна обеспечить герметичность соединения или нераскрытие стыка под нагрузкой. Задача о распределении нагрузки между элементами такого соединения является статически неопределимой и решается с учетом деформации этих элементов.

Обозначим $F_{\text{зат}}$ - сила затяжки болта; $F=R/z$ - внешняя нагрузка соединения, приходящаяся на один болт R - сила отрыва, z - число болтов).

После приложения внешней нагрузки F к затянутому соединению болт дополнительно растянется на некоторую величину Δ_p - деформация сжатия деталей уменьшится на ту же величину. Это значит, что только часть внешней нагрузки дополнительно нагружает болт, а другая часть приходится на разгрузку стыка. Если принять, что дополнительная нагрузка на болт равна χF , то затяжка стыка уменьшится на величину $(1-\chi)F$. Коэффициент внешней нагрузки R определяется по условию равенства дополнительных деформаций болта и деталей (условие совместности деформаций)

$$\Delta_p = \chi F \lambda_{\text{б}} = (1 - \chi) F \lambda_{\text{д}} \quad (24.3)$$

где $\lambda_{\text{б}}$ - податливость болта, равная его деформации, приходящейся на единицу силы; $\lambda_{\text{д}}$ - суммарная податливость соединяемых деталей. Из равенства (24.3) имеем

$$\chi = \frac{\lambda_{\text{д}}}{\lambda_{\text{б}} + \lambda_{\text{д}}} \quad (24.4)$$

Расчетная (суммарная) нагрузка болта

$$F_p = F_{\text{зат}} + \chi F$$

Зная расчетную нагрузку, оценивают эквивалентное напряжение по выражению (24.2), заменяя в нем $F_{\text{зат}}$ на F_p . Определение податливости болта и деталей для большинства практических случаев связано с трудностями, поэтому для приближенных расчетов соединений без мягких прокладок принимают $\chi \leq 0,2-0,3$,

при этом

$$F_p = F_{\text{зат}} + (0,2 - 0,3)F \quad (24.5)$$

4. Расчет болтового соединения, нагруженного силами, сдвигающими детали в стыке. Надежность соединения обеспечивается при отсутствии сдвига деталей в стыке. Конструкция может быть выполнена в двух вариантах. Болт поставлен с зазором (рис. 24.1,а). В этом случае болт должен быть затянут силой $F_{\text{зат}}$ так, чтобы внешняя нагрузка F , приходящаяся на один болт, уравнивалась силами трения на стыке деталей

$$F \leq fF_{\text{зат}} \quad \text{или} \quad F_{\text{зат}} = \frac{kF}{f}$$

где $k=1,2-2$ - коэффициент запаса; f - коэффициент трения в стыке.

Стержень болта будет работать на растяжение под действием силы $F_{\text{зат}}$ и на кручение под действием момента трения в резьбе. Расчетным уравнением является выражение (24.2).

Болт поставлен без зазора (рис 24.5). В этом случае затяжка болта необязательна. Стержень болта рассчитывают по напряжениям среза и смятия.

Условие прочности по напряжениям среза

$$\tau = \frac{4F}{\pi d_0^2 i} \leq [\tau] \quad (24.6)$$

где i - число плоскостей среза (на рис.24.5, при соединении двух деталей $i=1$; d_0 – диаметр стержня болта).

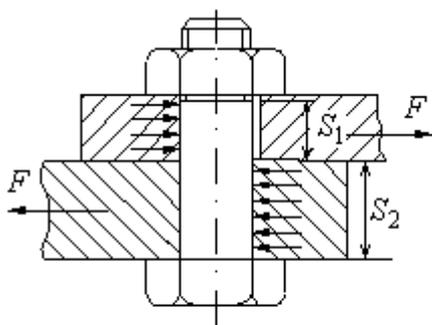


Рис.24.5

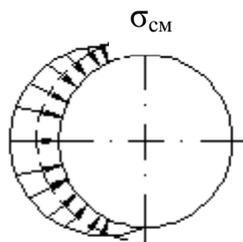


Рис.24.6

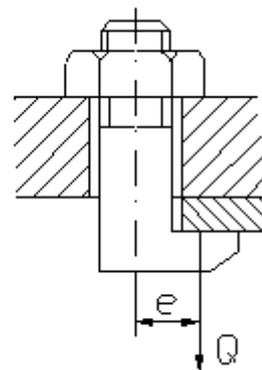


Рис.24.7

Расчет на смятие проводят по условным напряжениям. Боковая поверхность стержня болта испытывает действие распределенного давления (рис. 24.6), вызывающего смятие этой поверхности. Закон распределения давления трудно установить точно, поэтому за расчетное давление на поверхности смятия условно принимают равным отношению силы F к осевому сечению (показано на рис 24.6 пунктиром). Это давление называют напряжением смятия и определяют по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{ds} \leq [\sigma_{\text{см}}] \quad (24.7)$$

где s - меньшая из толщин соединяемых деталей (см. рис 24.5).

5. Расчет болтов, нагруженных эксцентричной осевой нагрузкой.

При эксцентричной осевой нагрузке болта (рис. 24.7) в стержне возникают напряжения растяжения и изгиба

$$\sigma_p = \frac{4Q}{\pi d_1^2} \quad \sigma_u = \frac{M}{W_x} = \frac{32Qe}{\pi d_1^3}$$

Суммарное напряжение с учетом затяжки болта равно

$$\sigma = 1,3\sigma_p \pm \sigma_u = 1,3 \frac{4Q}{\pi d_1^2} \pm \frac{32Qe}{\pi d_1^3} = \left(1,3 \pm \frac{8e}{d_1} \right) \quad (24.8)$$

Достоинством резьбовых соединений являются их высокая надежность, удобство сборки и разборки, возможность создания больших осевых сил, относительно невысокая стоимость стандартных крепежных изделий.

6. Расчет соединений, включающих группу болтов. Соединение нагружено моментом и силой, сдвигающими детали в стыке. Примером может служить присоединение косынки 1 к плите 2 четырьмя болтами 3 (рис. 24.8). При расчете соединения силу R переносят в центр стыка (точка 0) и добавляют момент $M=Rl$. Момент и сила стремятся сдвинуть косынку с места крепления. Найдем наиболее нагруженный болт.

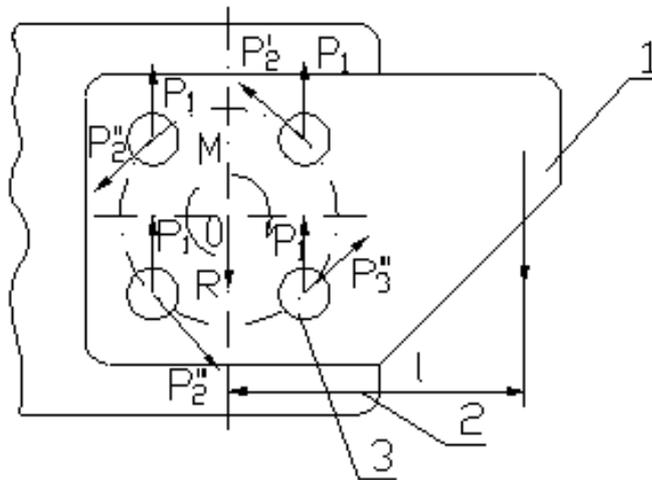


Рис. 24.8

Сила R распределяется по болтам равномерно. На каждый болт будет действовать сила $P_1 = \frac{R}{Z} = \frac{R}{4}$. Нагрузка от момента распределяется по болтам пропорционально их расстояниям от центра стыка $M = P_2' r_1 + P_2'' r_2 + \dots + P_n' r_n$

В данном примере $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$, так как болты расположены на одном и том же расстоянии от центра стыка, то и силы, действующие на них, одинаковы, т.е.

$$M = 4P_2 r \quad \text{откуда} \quad P_2 = \frac{M}{4r}$$

Направление сил P_2 перпендикулярно радиусам r_1, r_2 и т.д. Суммарная нагрузка каждого болта равна геометрической сумме сил P_1 и P_2 ; $\bar{F}_{\max} = (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)_{\max}$. Прочность болта определится выражениями (24.6), (24.7) или (24.2) в зависимости от наличия или отсутствия зазора между болтом и соединяемыми деталями.

Соединение нагружено моментом и силой, раскрывающими стык деталей. Рассмотрим этот случай на конкретном примере крепления кронштейна к основанию (рис. 24.9,а). Действующую силу R разложим на две силы S и N , перенесем их в центр стыка (точку O) и добавим момент $M = S l_3 - N l_N$. Нагрузки N и M раскрывают стык деталей, а сила S сдвигает кронштейн. Возможность раскрытия стыка и сдвига деталей устраняется затяжкой болтов с силой $F_{\text{зат}}$. Расчет по условию нераскрытия стыка. До приложения нагрузки R затяжка создает в стыке напряжения смятия

$$\sigma_{\text{зат}} = \frac{F_{\text{зат}} z}{A_{\text{ст}}} \quad (24.9)$$

где z - число болтов; $A_{\text{ст}}$ - площадь стыка. Считаем, что $\sigma_{\text{зат}}$ равномерно распределены по стыку. Сила N ра стягивает болты и уменьшает $\sigma_{\text{зат}}$ на величину

$$\sigma_N = \frac{N}{A_{\text{ст}}}(1 - \chi) \quad (24.10)$$

На практике в подобных соединениях величина χ мала и ее можно не учитывать. При решении вопроса о том, как изменяются напряжения в стыке под действием момента M , будем считать, что болты затянуты сильно и обеспечивают не раскрытие стыка. В этом случае можно предположить, что ось поворота кронштейна проходит вокруг оси симметрии стыка. При этом напряжения в стыке под действием момента M изменяются в соответствии с эпюрой, аналогичной эпюре напряжений при изгибе

$$\sigma_M \approx \frac{M}{W_{\text{ст}}} \quad (24.11)$$

где $W_{\text{ст}}$ момент сопротивления изгибу, который определяют для стыка. Эпюра суммарных напряжений в стыке принимает вид на рис.24.9,б.

где $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{зат}} \pm \sigma_N + \sigma_M$ - максимальное напряжение в стыке;

$\sigma_{\text{min}} = \sigma_{\text{зат}} \pm \sigma_N - \sigma_M$ - минимальное напряжение в стыке.

Знак минус или плюс определяется направлением силы N . По условию нераскрытия стыка $\sigma_{\text{min}} > 0$ или $\sigma_{\text{зат}} > \pm \sigma_N + \sigma_M$, или

$$\sigma_{\text{зат}} = K(\pm \sigma_N + \sigma_M) \quad (24.13)$$

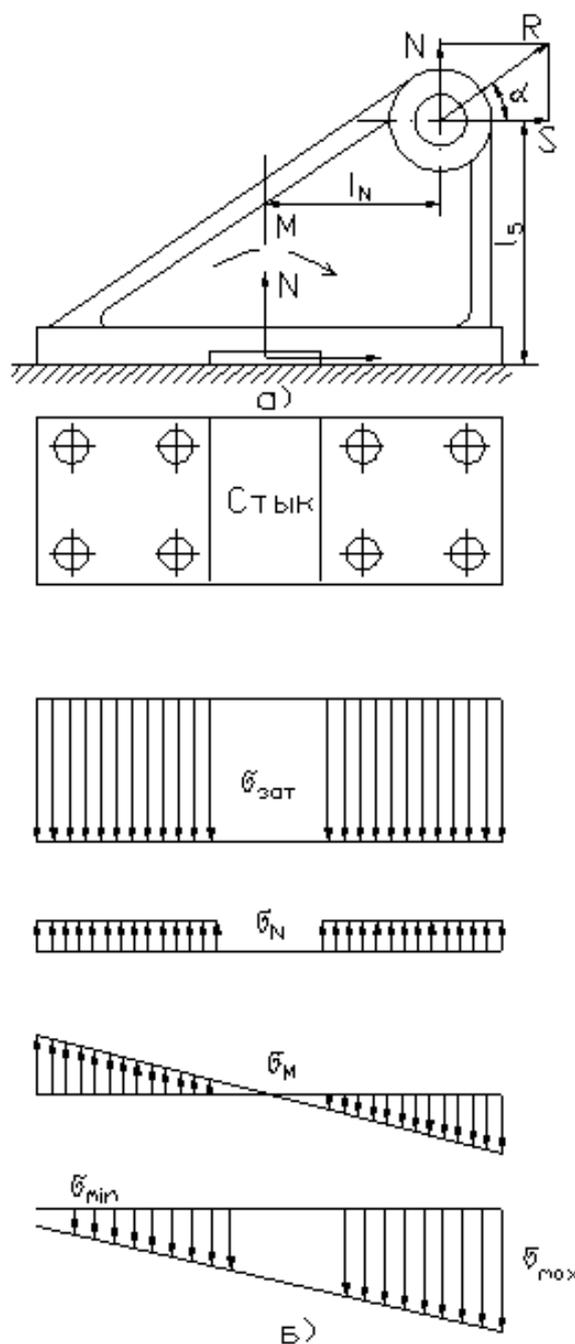


Рис.24.9

где $K = 1,3-2$ - коэффициент запаса по нераскрытию стыка. По условию (24.13) определяют $\sigma_{зат}$ и затем из формулы (24.2) находят $F_{зат}$. В тех случаях, когда материал основания малопрочен (например, бетон, дерево), необходимо проверять условие прочности основания по максимальным напряжениям смятия

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_{см}] \quad (24.14)$$

Расчет по условию отсутствия сдвига деталей в стыке (выполняют как прове-

рочный). Сила S уравнивается силами трения в стыке. Сдвига не будет, если $F_{тр} > S$ или $fK' > S$, где f - коэффициент трения в стыке; $K' = 1,3-2$ - коэффициент запаса.

Материалы резьбовых изделий и допускаемые напряжения Для изготовления резьбовых деталей применяют углеродистые стали марок стали 10, 20, 35, 45 и легированные стали марок 35Х, 30ХГСА и др. Углеродистые стали применяют для изготовления стандартных крепежных изделий общего назначения, работающих при статических нагрузках. Легированные стали применяют для высоконагруженных деталей при переменных и ударных нагрузках, при высоких температурах, в агрессивных средах и пр.

Допускаемое напряжение определяется по пределу текучести σ_T .

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$$

где n_T - коэффициент запаса прочности выбирается в зависимости от способа нагружения болта и вида нагрузки. Так для незатянутых болтов $n_T = 1,6-1,7$, для болтов, работающих с затяжкой, $n_T = 2,5-5$ при статической нагрузке, а при переменной нагрузке это значение удваивается; более подробно о выборе $[\sigma]$ для резьбовых соединений см. [6].

24.1.2 Шпоночные соединения

Шпонкой называется клиновидная, сегментная или призматическая деталь, устанавливаемая между валом и насаженными на него зубчатым колесом, шкивом или муфтой. Шпонка обеспечивает передачу вращающего момента от одной детали к другой. Призматическую шпонку врезают в вал на глубину около 0,6 от ее высоты (рис. 24.10,а). Ширина

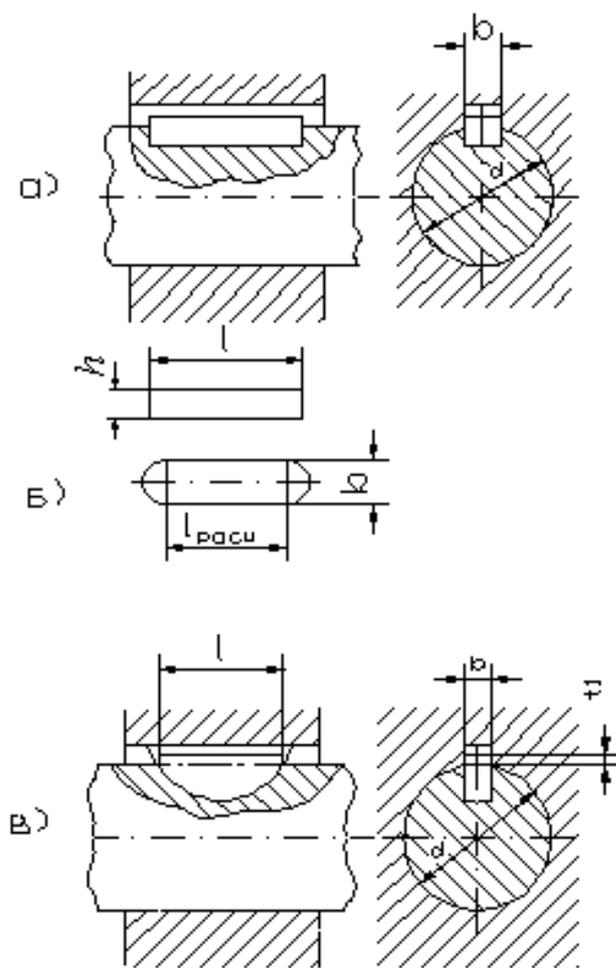


Рис. 24.10

шпонки b и ее высота h определены ГОСТом и выбираются в зависимости от диаметра вала d . Крутящий момент T передается с вала на ступицу через боковые грани шпонки, при этом на них возникают напряжения смятия $\sigma_{см}$. В продольном сечении шпонки возникают напряжения среза $\tau_{ср}$. Принимая для простоты расчета, что шпонка врезана в вал на половину своей высоты, находим напряжения

$$\sigma_{см} = \frac{4T}{hl_{расч}d} \leq [\sigma_{см}] \quad (24.15)$$

$$\tau_{ср} = \frac{2T}{bl_{расч}d} \leq [\tau_{ср}] \quad (24.16)$$

где $l_{расч}$ - расчетная длина шпонки, для призматической шпонки со скругленными торцами $l_{расч}=l-b$ (рис.24.10,б), с плоскими торцами $l_{расч} = l$. У стандартных шпонок размеры b и h подобраны так, что прочность на срез обеспечивается с избытком, поэтому в расчетах используют формулу (24.16) для определения $l_{расч}$ после чего

подбирают по сортементу одно из стандартных значений 1.

На рис. 24.10,в показано соединение сегментной шпонкой, для сегментной шпонки

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{ldt_1} \leq [\sigma_{\text{см}}] \quad (24.17)$$

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{2T}{ldb} \leq [\tau_{\text{ср}}] \quad (24.18)$$

Стандартные шпонки изготавливают из углеродистых или легированных сталей с пределом прочности $\sigma_{\text{в}}$ не менее 500 МПа. Величина допускаемых напряжений зависит от режима работы, прочности материала вала и ступицы, типа посадки ступицы на вал. Для стальной ступицы можно принимать $[\sigma_{\text{см}}] = 100-120$ МПа.

Основным достоинством призматических шпонок является простота конструкции и сравнительно низкая стоимость соединения, а недостатками – ослабление вала и ступицы шпоночными пазами, неустойчивость положения шпонки в пазах (выворачивание шпонки) и трудность обеспечения взаимозаменяемости. Сегментная шпонка обладает большей устойчивостью, но больше ослабляет вал.

Кроме призматических и сегментных шпонок, в общем машиностроении применяются клиновые шпонки, сведения о которых имеются в работах [3] и [6]. В точном машиностроении эти шпонки не применяются.

24.1.3 Шлицевые соединения

В соединениях этого типа выступы - зубья на валу, входят во впадины соответствующей формы в ступице. Эти соединения можно представить как многошпоночные, у которых шпонки выполнены за одно целое с валом. По форме профиля шлицевые соединения бывают прямобочные (рис. 24.11,а), эвольвентные (рис. 24.11,б) и треугольные (рис.24.11,в). Расчет на смятие боковых поверхностей шлицев проводят по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{T}{0,5zhd_{\text{ср}}\psi} \leq [\sigma_{\text{см}}] \quad (24.19)$$

где T- передаваемый крутящий момент; z - число шлицев (зубьев); h и l - высота и длина поверхности контакта; $d_{\text{ср}}$ - средний диаметр поверхности контакта; ψ - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по шлицам,

обычно $\psi=0,7 - 0,8$.

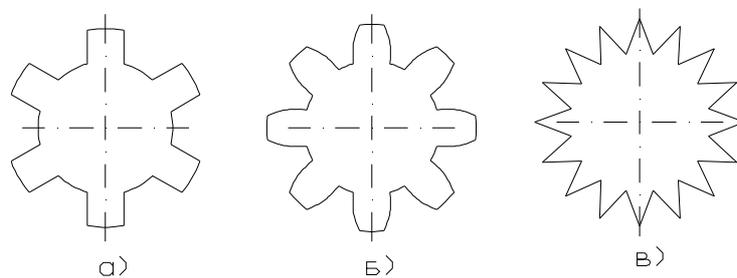


Рис. 24.11

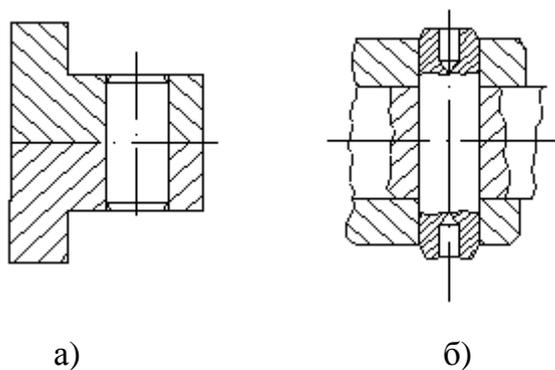


Рис. 24.12

Прямобочные шлицевые соединения центрируют по боковым граням, наружному или внутреннему диаметру, исходя из технологических условий. Эвольвентные шлицевые соединения выполняют с центрированием по боковым граням. Соединения с треугольными зубьями применяют главным образом как неподвижные при тонкостенных втулках.

24.1.4 Штифтовые соединения

Штифтом называют цилиндрический или конический стержень, плотно вставляемый в отверстие двух соединяемых деталей (рис. 24.12,а). Штифты предназначены для точного взаимного фиксирования деталей и передачи относительно небольших нагрузок. Цилиндрические штифты ставят в отверстия с натягом; от вы-

падания они удерживаются силами трения; в ответственных случаях концы штифтов расклёпывают (рис. 24.12,б), или применяют другие средства их крепления.

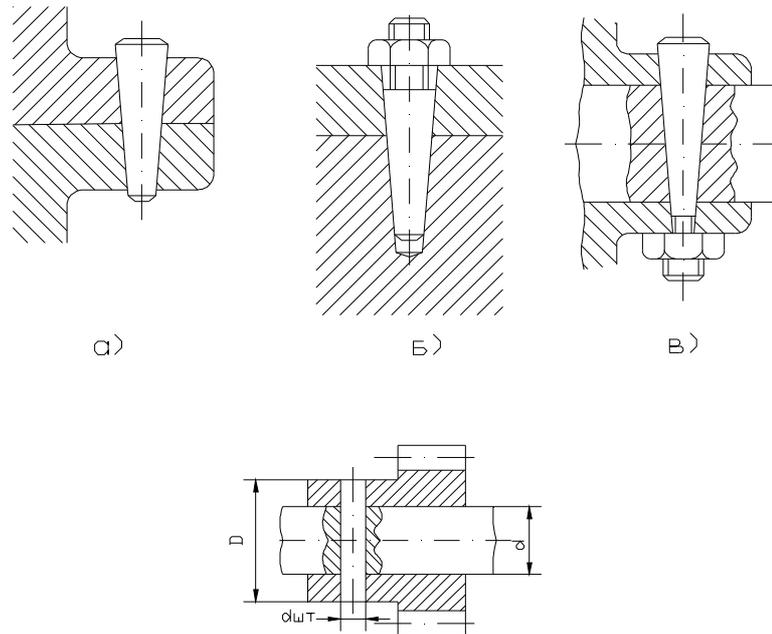


Рис. 24.14

Конические штифты выполняют с конусностью 1:50, обеспечивающей надежное самоторможение штифта. Применяют штифты простые (рис. 24.13,а) с резьбой для извлечения при разборке (рис. 24.13,б) и с резьбой для затяжки (рис. 24.13,в). Расчет штифта сводится к проверке его прочности на срез и смятие. Для двухсрезного штифта, фиксирующего на валу зубчатое колесо (рис. 24.14):

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4T}{\pi d d_{\text{шт}}^2} \leq [\tau_{\text{ср}}] \quad (24.20)$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{2T}{d d_{\text{шт}} (D - d)} \leq [\sigma_{\text{см}}] \quad (24.21)$$

24.2. Неизъемные соединения

24.2.1 Сварные соединения

Сварка - процесс соединения деталей за счет сил межмолекулярного сцепления, получаемого в результате местного расплавления материала деталей. Сварка обеспечивает неразъемное плотное и прочное соединение деталей, наиболее совершенное из неразъемных соединений, так как лучше других приближает составные детали к цельным.

В машиностроении применяются следующие основные виды сварки: химическая (газовая), электромеханическая (контактная) и электродуговая. При химической (газовой) сварке свариваемый металл доводится до плавления за счет тепла, выделяемого при сжигании горючих газов (ацетилен, водорода) в струе кислорода. При электромеханической сварке металл разогревается теплом, выделяющимся при прохождении электрического тока через стык соединяемых элементов. Металл доводится до тестообразного состояния и сжимается. В электродуговой сварке используется тепло электрической дуги, образуемой в месте сварки между металлическим электродом и свариваемыми деталями.

Металл электрода (присадочный металл), расплавляясь, заполняет промежуток между свариваемыми деталями.

Виды сварных соединений и расчет их на прочность

Стыковое соединение.

В зависимости от толщины соединяемых элементов осуществляется по одному из вариантов, показанных на рис. 24.15. Для элементов малой толщины ($s \leq 3$ мм) применяют сварку с отбортовкой (рис. 24.15,а), для элементов средней толщины ($3 \text{ мм} < s \leq 20 \text{ мм}$) сварку без скоса кромок (рис. 24.15,б) или с односторонними скосами (рис. 24.15,в), для элементов большей толщины ($s > 20$ мм) - сварку с криволинейными (рис. 24.15,г) и двухсторонними скосами (рис. 24.15,д). Стыковые швы рассчитывают на прочность по номинальному сечению соединяемых элементов без учета утолщения швов, используя те же зависимости, что и для элементов без швов. При растяжении полосы с размерами поперечного сечения b и s , сваренной из двух частей и находящейся под действием силы F напряжения в шве

$$\sigma = \frac{F}{bs} \leq [\sigma'] \quad (24.22)$$

где $[\sigma']$ - допускаемое напряжение в сварном шве, равное (0,9-1,0) $[\sigma_p]$ в зависимости от метода сварки; $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение для основного металла.

При нахлесточном соединении применяют угловые швы. В зависимости от расположения швов относительно действующей силы их разделяют на лобовые, перпендикулярные силе (рис. 24.16,а); фланговые, параллельные линии действия силы (рис. 24.16,б); косые, расположенные под углом к направлению силы (рис. 24.16,в); комбинированные, представляющие собой сочетание двух или трех перечисленных видов швов (рис. 24.16,г).

Поперечное сечение углового шва близко к равнобедренному треугольнику, в котором размер катета k равен толщине листов s (рис. 24.16,а). Разрушение угловых швов происходит по наименьшему сечению, т.е. по сечению плоскостью, проходящей через биссектрису прямого угла. Расчетное сечение принимают равным $0,7kl$, где l - длина шва. Расчет угловых швов всех типов унифицирован и проводится по формуле

$$t = \frac{F}{0,7kl} \leq [t'_{cp}] \quad (24.23)$$

Эта формула непосредственно относится к фланговым швам, а для лобовых применяется условно.

Соединения тавровые и угловые показаны на рис. 24.17. Эти соединения выполняют без подготовки кромок при малых толщинах деталей, с односторонней подготовкой кромок при средних толщинах и с двусторонней подготовкой кромок при значительных толщинах. Соединения, выполненные по схеме рис. 24.17,а, рассчитывают так же, как и соединения нахлесточные, а по схеме рис. 24.17,б и 24.17,в - как соединения стыковые. Угловые соединения (рис. 24.17,г,е) применяют преимущественно для передачи малых нагрузок и поэтому обычно не рассчитывают.

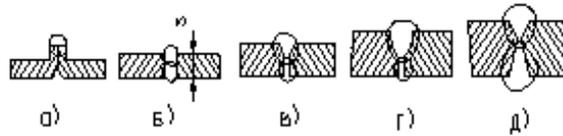


Рис.24.15

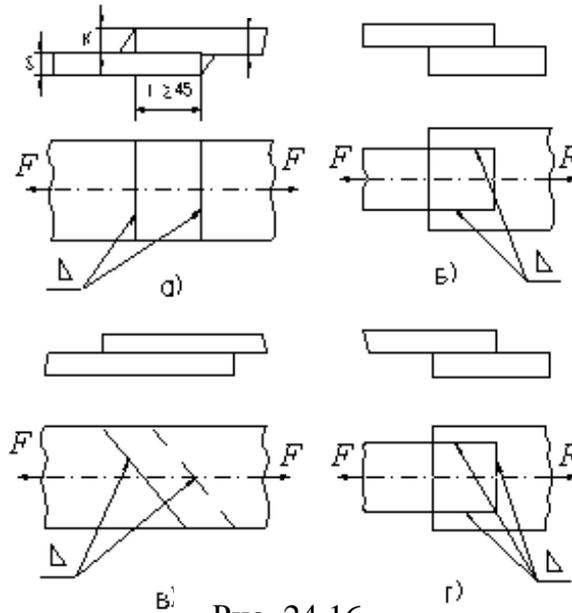


Рис. 24.16

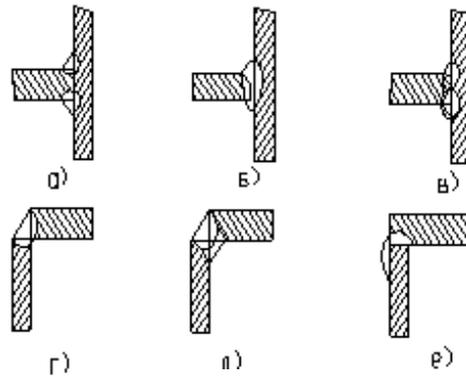


Рис. 24.17

24.2.2 Соединения пайкой и клеевые соединения

Пайка применяется для соединения тонкостенных деталей, элементов электрических схем, в том числе и в приборах микроэлектроники. При пайке детали соединяются расплавленным припоем, представляющим собой металл или сплав. Температура плавления припоя ниже температуры плавления материалов соединяемых деталей. Соединяемые поверхности перед пайкой очищают при помощи специальных веществ. В качестве флюсов обычно используют канифоль, буру,

хлористый цинк.

Припой в зависимости от их температуры плавления разделяют на легкоплавкие (мягкие), у которых температура плавления ниже 400°С, и тугоплавкие - твердые с температурой плавления выше 400°С. Наиболее распространены мягкие припои - оловянно-свинцовые марок ПОС-61, ПОС-90.

К твердым припоям относятся припои на медной основе марки ПМЦ-36 и на серебряной основе ПСр-72 и ПСр-10.

Достоинствами пайки являются простота и дешевизна технологического процесса, возможность соединения деталей, изготовленных из разнородных металлов и сплавов; недостатком - невысокая механическая и термическая прочность соединения.

Клеевые соединения применяют для скрепления деталей из однородных и разнородных материалов - металлов, керамики, стекла, пластмасс в различных сочетаниях. Клеевые соединения имеют следующие основные преимущества: надежно соединяют детали из очень тонких листовых материалов, а также разнородных материалов, обеспечивают герметичность и стойкость против коррозии.

При склеивании широко применяют клеи марок БФ-2, БФ-4, БФ-6, бакелитовый, карбинольный, эпоксидный и др. Прочность клеевого соединения зависит от сорта клея и материалов склеиваемых деталей. Например, прочность клея группы Б4 колеблется от 5 до 60 МПа. В оптических приборах часто применяют склеенные линзы или призмы. Для склеивания оптического стекла используют специальные клеи, отвечающие следующим требованиям: хорошая прозрачность и неокрашенность, близость коэффициента преломления клея к коэффициенту преломления стекла, стойкость к температурным колебаниям, стойкость во времени.

Для склеивания оптических деталей применяются следующие клеи: пихтовый бальзам натуральный; бальзамин - синтетический клей; акриловый клей; эпоксидный клей ОК-50; полиуретановый клей ПУ-2.

24.2.3 Заклепочные соединения

Соединение двух или более изделий проводится при помощи специальных крепежных деталей - заклепок. Заклепка представляет собой цилиндрический стержень

жень с двумя, головками, одна из которых выполнена заранее, а вторая получается расклепкой в процессе сборки. Головки бывают разные по форме: полукруглые, потайные, полупотайные, плоские. Стержень заклепки может быть сплошным или полым. Заклепку вставляют в отверстие соединяемых деталей и расклепывают. При этом образуется замыкающая головка, а стержень заклепки заполняет кольцевой зазор в отверстии (рис. 24.18). Силы, вызванные упругими деформациями деталей и стержня заклепки, стягивают детали, образуя неподвижное соединение. Наиболее распространены следующие виды заклепочных соединений: внахлестку (рис. 24.19,а), с одной (рис. 24.19,б) и двумя накладками (рис. 24.19,в).

Расчет заклепочных соединений. Заклепочные соединения в большинстве случаев применяют для скрепления листов и фасонных прокатных профилей, нагруженных силами, действующими в плоскости стыка. Сопротивление относительно сдвигу деталей оказывает стержень заклепки и частично трение в стыке. При этом тело заклепки подвергается изгибу, смятию и сдвигу. Расчет заклепок на прочность проводится по условной методике на срез и смятие аналогично расчету болтов (см. раздел 24.1). Поэтому для заклепок остаются справедливыми расчетные формулы (24.6) и (24.7), которые определяют прочность по напряжениям среза $\tau_{ср}$ и смятия $\sigma_{см}$. При расчете заклепочных соединений, нагруженных силой в плоскости стыка, допускают, что нагрузка распределяется равномерно между всеми заклепками шва. Основные размеры заклепочных соединений d , t , l , s (рис. 24.20) выбирают, обеспечивая равнопрочность заклепки на срез и смятие, а соединяемых листов на растяжение и срез листа. На практике принимают $d=2s$, $t=2,5d$, $l=1,5d$.

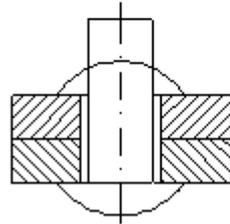


Рис. 24.18

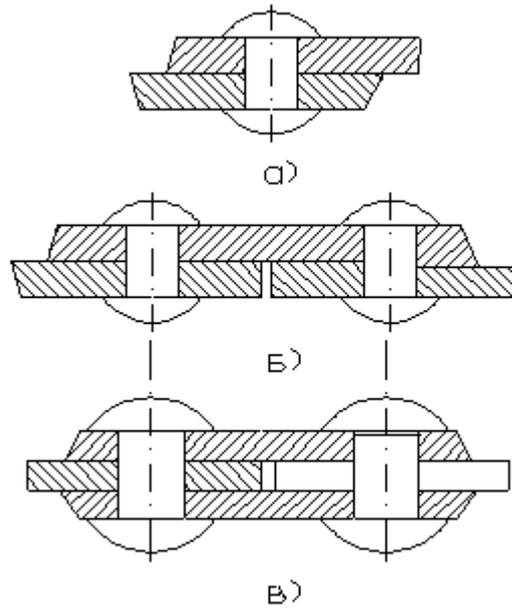


Рис. 24.19

Одним из существенных недостатков заклепочных швов является их ослабление отверстиями. Для того чтобы оценить это ослабление определяется так называемый коэффициент прочности шва ϕ . При растяжении целого листа напряжение в поперечном сечении $\sigma_0 = F/b_s$; в сечении, ослабленном отверстиями под заклепки, $\sigma = \frac{F}{(b - zd)s}$, где z -число заклепок в ряду. Коэффициент прочности ϕ равен отношению

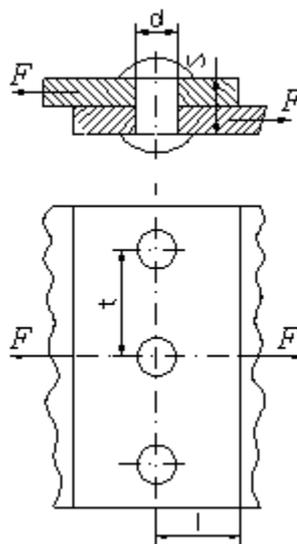


Рис. 24.20

$$j = \frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{b - zd}{b} \quad (24.24)$$

Обычно значение ϕ лежит в пределах от 0,6 до 0,85. Материал заклёпок должен быть пластичным и иметь одинаковый или близкий химический состав с материалом соединяемых деталей. Заклёпки изготавливают из малоуглеродистой стали, меди, латуни, алюминия. Заклепочные соединения характеризуются высокой прочностью, но имеют ряд недостатков: большой расход металла, высокую стоимость и сложность технологического процесса изготовления клепанных конструкций, трудность соединения деталей сложной конфигурации. Поэтому в настоящее время заклепочные соединения в основном вытеснены сварными. Область применения заклепочных соединений ограничивается следующими случаями:

- 1) соединения деталей из несвариваемых материалов;
- 2) соединения, в которых недопустим нагрев при сварке;
- 3) соединения, подверженные большим ударным и вибрационным нагрузкам.

Разновидностью заклепочных соединений являются соединения с помощью развальцовки и завальцовки. На рис 24.21 показано неподвижное соединение цилиндрической стойки с платой.

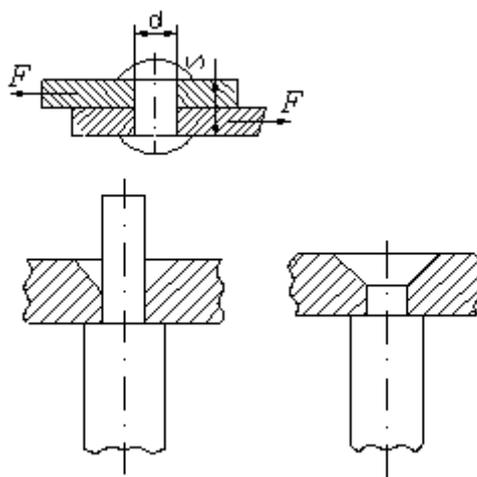


Рис. 24.21

Конец стойки, вставленный в отверстие платы, расклепан (развальцован). Соединения этого вида широко применяются в приборостроении.

24.2.4 Соединения деталей с натягом

Соединяемые детали сопрягаются по цилиндрической поверхности. Неподвижность соединения обеспечивается гарантированным натягом при сборке. После сборки вследствие упругих и пластических деформаций на поверхности контакта возникает удельное давление p и соответствующие ему силы трения, препятствующие взаимному смещению деталей.

Достоинства соединений с натягом: высокая надежность, хорошая центровка сопрягаемых деталей. К недостаткам относятся большая стоимость соединения, связанная с необходимостью обрабатывать соединяемые детали с высокой точностью, а также более сложная технология сборки. Сборка при соединении деталей с натягом осуществляется одним из трех способов: прессованием без нагрева, с нагревом втулки или с охлаждением вала.

Расчет прочности соединения

При нагружении прессового соединения осевой силой F_a (рис.24.22,а) условием неподвижности соединения будет неравенство

$$F_a \leq f p \pi d l \quad (24.25)$$

где f - коэффициент трения. Для стальных деталей принимают $f = 0,08 - 0,1$ (сборка прессованием) и $f = 0,12 - 0,14$ (сборка с нагревом или охлаждением); d и l - диаметр и длина сопрягаемой цилиндрической поверхности.

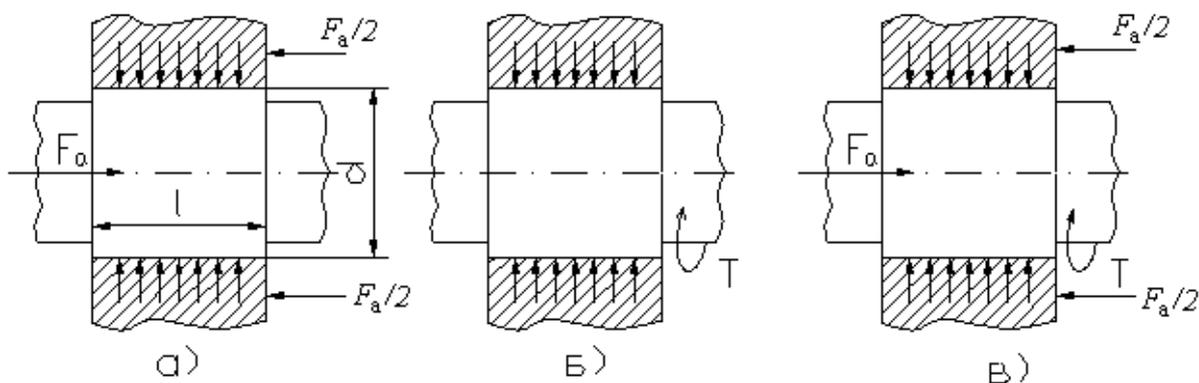


Рис. 24.22

При нагружении крутящим моментом T (рис. 24.22,б) условие прочности можно записать в виде

$$T \leq \frac{fp\pi d^2 l}{2} \quad (24.26)$$

При совместном действии силы F_a и момента T (рис. 24.22,в)

$$\sqrt{\left(\frac{2T}{d}\right)^2 + F_a^2} \leq fp\pi dl \quad (24.27)$$

При известных размерах соединения и заданных нагрузках из выражений (24.25) – (24.27) можно найти удельное давление p , которое обеспечит необходимые силы трения. Удельное давление на поверхности контакта связано с расчет-

ным натягом Δ_p (мкм) зависимостью

$$p = \frac{\Delta_p}{d \left(\frac{c_1}{E_1} + \frac{c_2}{E_2} \right)} \cdot 10^2 \quad [МПа] \quad (24.28)$$

$$c_1 = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - m_1 \quad ; \quad c_2 = \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} + m_2 \quad (24.29)$$

E_1, E_2, μ_1, μ_2 - модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов вала и втулки; d - номинальный диаметр поверхности соединения; d_1 - внутренний диаметр охватываемой детали (для сплошного вала $d_1 = 0$); d_2 - наружный диаметр охватывающей детали (втулки или ступицы). Вычислив расчетный натяг Δ_p , определяют минимальный натяг Δ_{\min} с поправкой на срезание и сглаживание неровностей при запрессовке:

$$\Delta_{\min} = \Delta_p + 1,2(R_{z1} + R_{z2}) \quad (24.30)$$

где R_{z1} и R_{z2} - максимальные высоты неровностей на сопрягаемых поверхностях, мкм. При соединениях с натягом шероховатость поверхностей не должна превосходить $R_z \leq 6$ мкм. По минимальному натягу подбирается одна из стандартных посадок. Примеры расчётов приведены в [6].

24.2.5 Неразъемные соединения в микроэлектронных приборах

При изготовлении микроэлектронных приборов широко применяются такие способы соединения деталей, как сварка, пайка и склеивание. Однако хорошо известные, так называемые классические технологические методы сборки, в данном случае или неприемлемые вообще, или применяются со значительно измененной технологией. Объясняется это следующими причинами.

1. В электронных приборах применяются различные материалы, основными из которых являются металлы и их сплавы (в том числе тугоплавкие), стекла, керамика, синтетические материалы, ситаллы. Разнородность материалов усложняет процессы сварки и пайки деталей.

2. Детали электронных полупроводниковых приборов имеют чрезвычайно малые размеры от миллиметров до микрометров. Так толщина проводников 10-200 мкм, тонких пленок 0,05-1,0 мкм. Микроминиатюризация деталей создает дополнительные трудности, требует свариваемые и паяные швы чрезвычайно малых размеров, точного позиционирования места сварки или пайки, ограничения нагрева вокруг сварной зоны для предохранения от пережога тонких стенок деталей и т.д.

3. Для повышения надежности полупроводниковых приборов интегральные микросхемы обычно помещают в герметизированные корпуса. Корпуса предохраняют схемы от механических повреждений и влияния дестабилизирующих факторов внешних воздействий. Чаще всего в корпусах создается глубокий вакуум и в этом случае сварные и паяные соединения должны обладать не только достаточной прочностью, но и обеспечивать вакуумоплотные конструкции. В таких условиях возникает проблема электрической, физической и химической совместимости материалов, применяемых в производстве приборов.

4. Массовость производства полупроводниковых приборов требует высокопроизводительные методы монтажа. Для иллюстрации представим две конструкции полупроводниковых приборов. Конструкция маломощного кремниевого выпрямительного диода показана на рис. 24.23. Кристалл кремния 1 приклеен к кристаллодержателю. Контактная пружина (игла) 3 припаяна к иглодержателю 4.

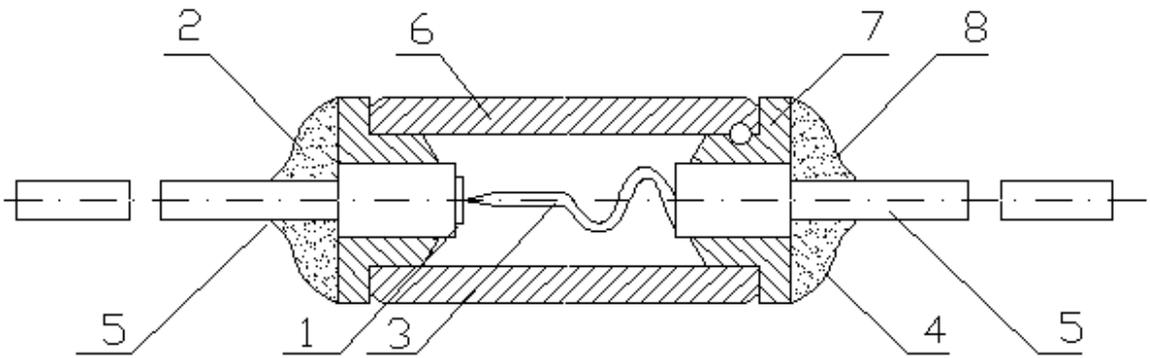


Рис. 24.23

Держатели выполнены из проволочного никеля диаметром 1,5 мм. Проволочные выводы 5 диаметром 0,5 мм, выполненные из платинида, приварены к держателям. Корпус прибора металлостеклянный. Он выполнен спаиванием стеклянной трубки 6 с двумя штампованными втулками 7 из ковара. Герметизируют прибор пайкой с применением флюса. Для пайки используют мягкий припой ПОС-61 (поз. 8 на рис. 42.23). Габариты корпуса 4x12 мм.

Интегральная микросхема, помещенная в прямоугольный корпус, показана на рис. 24.24. полупроводниковый кристалл 1 приклеен эмалью 2 к керамической подложке 3. Подложка, керамическая рамка 4 и крышка 5 спаяны между собой стеклом 6. Стекло предназначено для получения герметичного спая, а керамические детали служат в качестве термокомпенсаторов и теплоотводов. Выводы 7, впаянные в стекло, соединяются с кристаллом с помощью проводников 8, припаянных к контактными площадкам на кристалле и выводах. Габаритные размеры корпуса 2x4x8 мм.

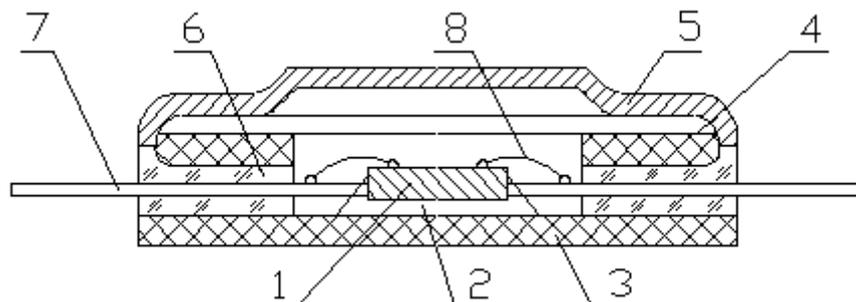


Рис. 24.24

Соединения стекла с металлом. В технике известно несколько способов прочно-

го вакуумноплотного соединения металла и стекла. Одним из них является соединение размягченного, почти расплавленного стекла с раскаленным металлом. Благодаря прочному "прилипанию" стекла к металлу осуществляется соединение двух деталей из разнородных материалов в одно целое. Расплавленное стекло очень хорошо смачивает все металлы, если соблюдены следующие условия:

- 1) на поверхности металла имеется некоторый адсорбирующий слой (окисный слой);
- 2) металл нагрет до температуры расплавленного стекла;
- 3) температура плавления металла выше температуры спаивания.

При этих условиях между стеклом и металлом существует достаточно прочное сцепление (адгезия), сохраняющееся после совместного охлаждения соединенных деталей. Несмотря на то, что соединение осуществляется без посредства третьего вещества (припоя) соединение носит название стеклянного спая.

Соединение керамики с металлом. В настоящее время существует несколько способов соединения керамики с металлами. Основными из них являются:

- 1) пайка предварительно металлизированной керамики твердыми припоями;
- 2) соединение при помощи стеклянного спая;
- 3) термокомпрессионная сварка, позволяющая получить соединение с высокими термомеханическими и вакуумными свойствами.

Процесс металлизации заключается в прочном закреплении слоя металла заданной толщины на поверхности керамической детали, предназначенной для пайки, для металлизации используются пасты и пленки толщиной 30-50 мкм. Широкое применение получила молибденомарганцовая металлизация, которая проводится намазкой, пульверизацией (распылением), наклейкой пленки и т.п. Для неразъемного соединения металлов с керамикой или со стеклом необходимо применять материалы, как можно лучше согласованные по температурному коэффициенту линейного расширения (КТЛР) в диапазоне температур от нормальной до температуры сварки (спайки). При разных КТЛР материалов в деталях возникают тепловые напряжения, которые приводят к нарушению плотности соединения, а иногда и к разрушению спая.

Специально для соединения микросхем разработано и применяется большое количество способов сварки и пайки.

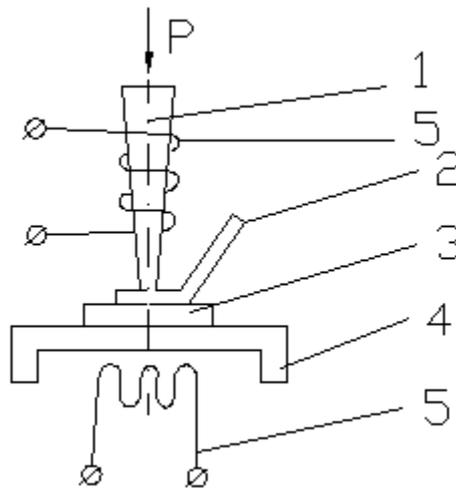


Рис. 24.25

1. Термокомпрессионная сварка. Процесс сварки осуществляется при нагреве деталей до определенной температуры (ниже температуры образования эвтектики соединяемых материалов) и при относительно невысоких удельных давлениях. Схема установки для термокомпрессионной сварки показана на рис. 24.25. Свариваемые детали: кристалл полупроводникового прибора 3 и присоединяемый проводник 2 ставятся на рабочий столик 4 и прижимаются к нему пуансоном 1. Пуансон и рабочий столик нагреваются спиралью 5.

2. Холодная сварка или сварка давлением основана на сжатии деталей в специальном приспособлении. При пластической деформации деталей происходит их герметичное соединение без нагрева материалов. Метод пригоден лишь для соединения пластичных материалов, главным образом меди. Разновидностью этого метода является сварка давлением с косвенным импульсным подогревом инструмента. Продолжительность импульса тока через инструмент от 0,01 с до нескольких секунд. Вследствие кратковременности процесса нагрева металлический проводник в месте контакта может нагреваться до более высоких температур, чем при термокомпрессии. Это позволяет приваривать к полупроводникам и особенно к пленкам проводники из относительно малопластичных материалов. Способ сварки давлением с импульсным нагревом иногда называют диффузионной сваркой.

3. Ультразвуковая сварка - соединение материалов в твердом состоянии за счет возбуждения в свариваемых деталях упругих колебаний ультразвуковой частоты при одновременном создании определенного удельного давления. При ультразву-

ковой сварке энергия вибрации при механических колебаниях ультразвукового преобразователя создает сложное напряженное состояние деталей. При достижении определенной величины эквивалентного напряжения происходит пластическая деформация материалов и их соединение. Температура в зоне контакта не превышает 30-50% от температуры плавления соединяемых материалов. Диффузионная, термокомпрессионная и ультразвуковая сварка - это методы соединения материалов в твердом состоянии без образования литого ядра.

4. Контактная точечная или шовная сварка - основана на нагреве металла в местах наибольшего сопротивления при прохождении электрического тока и одновременном сжатии соединяемых металлов. При обычном способе контактной сварки электроды располагаются с противоположных сторон свариваемых деталей, которые сжимаются электродами с требуемым усилием. В зависимости от вида электрода 1 выполняется точечная сварка (рис. 24.26,а) или шовная (рис. 24.26,б).

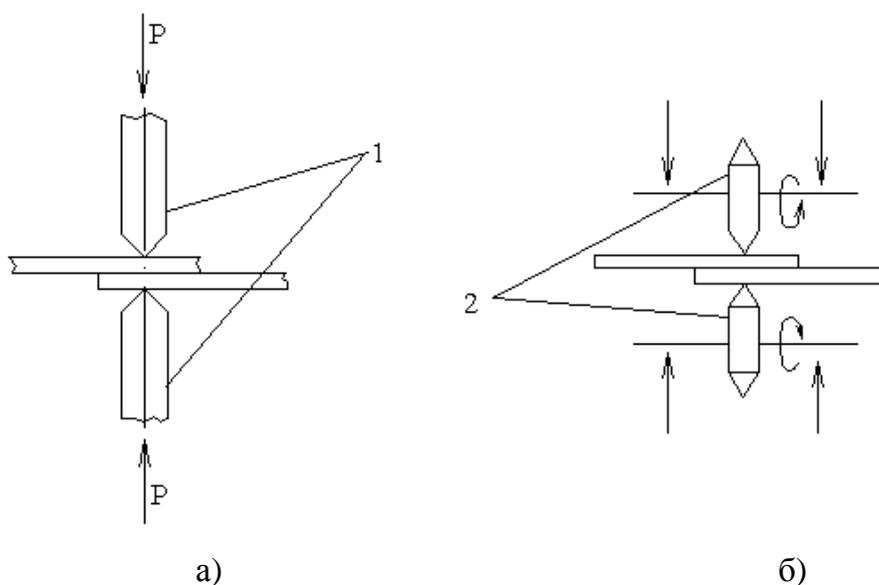


Рис. 24.26

В последнем случае электродами являются ролики 2, непрерывно катящиеся по изделию, образуя сплошной сварной шов. Разновидностью контактной сварки является конденсаторная или импульсная сварка. В этом случае на электроды подается ток большой силы в течение короткого промежутка времени. При импульсной сварке разогревается до расплавления очень тонкий слой материала (около 10 мкм).

5. Сварка электронным лучом использует энергию сжатого потока ускоренных электронов, направленных на место контакта. Их кинетическая энергия при тор-

можении на детали превращается в тепло. Нагрев нижнего из соединяемых металлов происходит только благодаря теплопроводности. Сварка происходит в вакууме, так как электронный луч при прохождении через воздух обычно ослабляется. Достоинствами этого метода является наименьшее пятно сварки, незначительная термическая нагрузка вокруг сварной зоны, высокая чистота соединения, точное позиционирование луча, свариваемость термочувствительных и тугоплавких материалов, высокая производительность. Недостаток - сложность оборудования.

б. Сварка лазерным лучом использует энергию светового луча высокой эффективности (лазерный луч). Общую энергию излучения можно сконцентрировать на пятно диаметром 10 мкм. Диаметр пятна нагрева примерно 200 мкм. Сварка происходит на воздухе. Продолжительность импульса 4-8 мс.

Прецизионная пайка

Прецизионная пайка полупроводниковых приборов имеет ту особенность, что здесь редко применяется классический инструмент - паяльник. Для осуществления, прецизионной пайки обычно используют дозированные припои в виде дисков, шайбочек, скобок, проволочных колец 1, (рис. 24.27), а нагрев обеспечивается импульсным электротокком, электронным, инфракрасным или лазерным лучом. Наиболее часто при производстве корпусов приборов применяется мягкий припой ПОС-61 или твердые припои ПСр-50, ПСр-50КД, ПСр-72 и др. Пайку мягкими припоями выполняют обычно на воздухе с применением флюсов, а пайку твердыми припоями - в сфере водорода без флюсов.

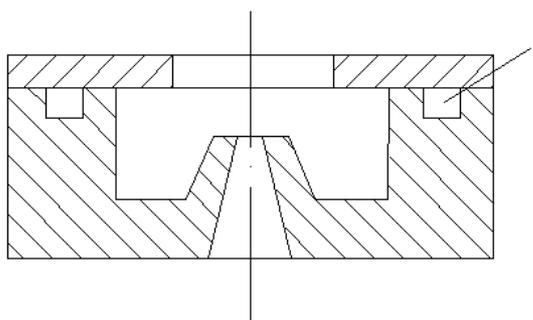


Рис. 24.27

Припои на основе серебра обеспечивают хорошую смачиваемость основных металлов, хорошую электро- и теплопроводность паяных соединений, образуют прочные и чистые швы.

Лекция 25. МУФТЫ

25.1 Назначение и классификация

Муфты [3,6,9] служат для соединения валов или других вращающихся деталей с целью передачи движения без изменения скорости. Потребность в соединении валов связана с тем, что большинство машин, механизмов или приборов состоят из отдельных узлов с входными и выходными валами. Такими узлами являются, например, двигатель, редуктор и исполнительный механизм (рис. 25.1). Непосредственная силовая и кинематическая связь отдельных частей машины, механизма или прибора осуществляется с помощью муфт.

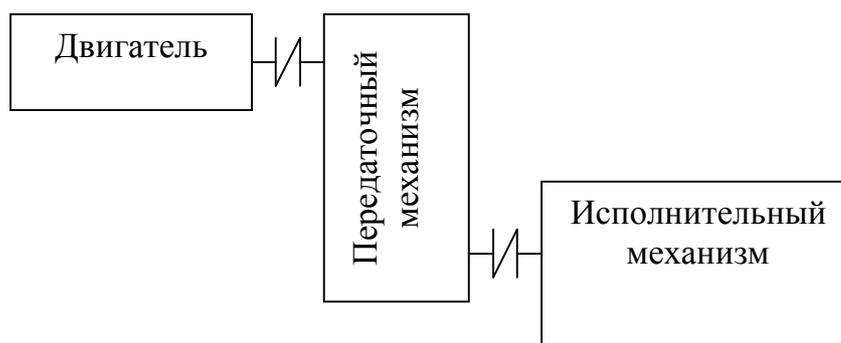


Рис. 25.1

Соединение валов является основным, но не единственным назначением муфт. Муфты, например, применяют для включения и выключения исполнительного органа при непрерывно работающем двигателе, для предохранения рабочих органов от перегрузок, компенсации несоосности валов, снижения динамических нагрузок, передачи движения между валами только в одном направлении и др.

Ниже приводится краткая классификация широко применяемых муфт (рис.25.2). В данной классификации приведены только муфты для соединения ва-

лов. Муфтами же вообще в технике называются устройства для соединения стержней, труб, электрических проводов, и др. Однако такие муфты изучаются в специальных курсах и поэтому здесь не рассматриваются.

Большое число муфт стандартизовано; основными параметрами при нормализации муфт являются диаметр вала и крутящий момент (иногда пропорциональная моменту величина отношения мощности к частоте вращения P/n). Муфты нужного размера выбирают по таблицам стандарта или каталогов (которые имеются в справочной и учебной литературе [3,9]), исходя из расчетного значения момента, учитывающего условия эксплуатации,

$$T_p = Tk, \quad (25.1)$$

где T - номинальный момент на валу; k - коэффициент режима, выбираемый из таблиц [6] величина которого в зависимости от типа рабочей машины колеблется в широких пределах (от 1 до 6), или рассчитываемый аналитически по формуле

$$k = \frac{T_{max}}{T} \frac{J_2}{J_1 + J_2}; \quad (25.2)$$

J_1 и J_2 - моменты инерции вращающихся частей соответственно двигателя и машины, приведенные к оси муфты; T_{max} - максимальное значение крутящего момента.

Выбранные муфты при необходимости проверяют на прочность (силовые передачи) и на кинематическую точность (в приборных передачах).

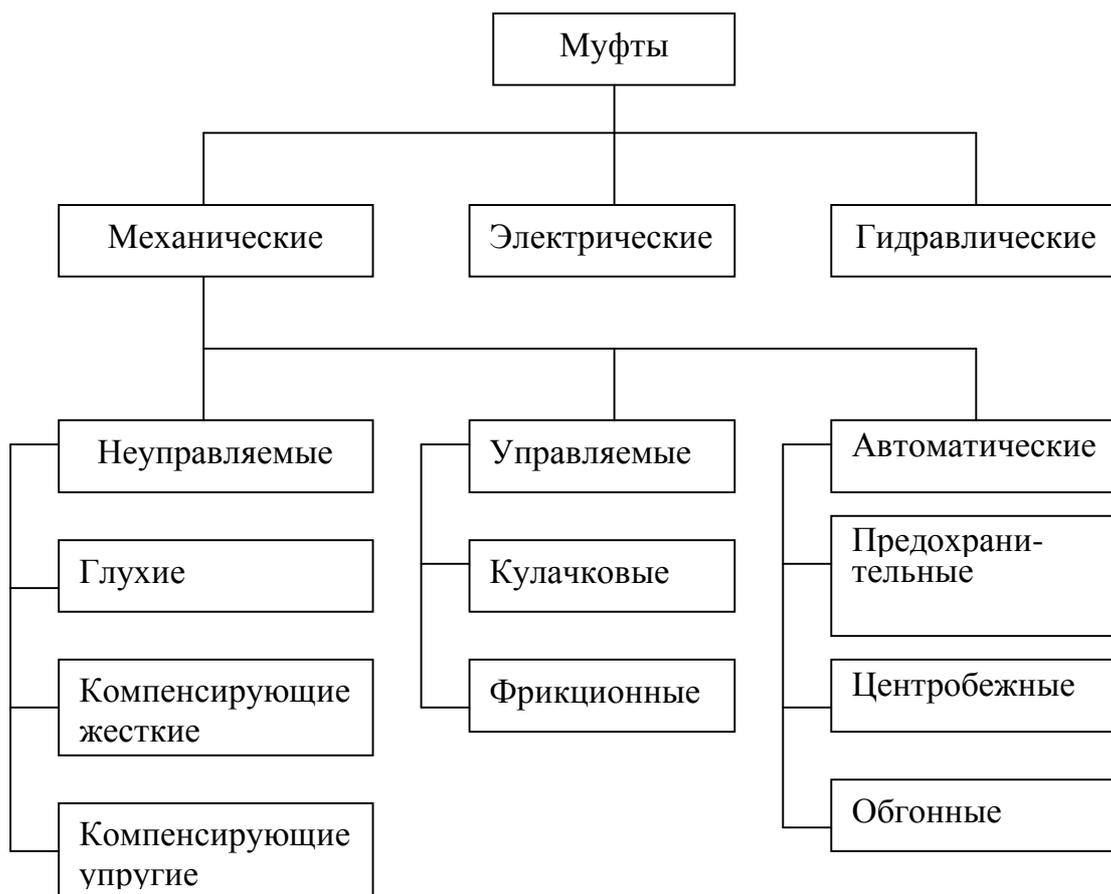


Рис. 25.2

Большое число муфт стандартизовано; основными параметрами при нормализации муфт являются диаметр вала и крутящий момент (иногда пропорциональная моменту величина отношения мощности к частоте вращения P/n). Муфты нужного размера выбирают по таблицам стандарта или каталогов (которые имеются в справочной и учебной литературе [3,9]), исходя из расчетного значения момента, учитывающего условия эксплуатации,

$$T_p = Tk, \quad (25.1)$$

где T - номинальный момент на валу; k - коэффициент режима, выбираемый из таблиц [6] величина которого в зависимости от типа рабочей машины колеблется в широких пределах (от 1 до 6), или рассчитываемый аналитически по формуле

$$k \frac{T_{max}}{T} \frac{J_2}{J_1 + J_2}; \quad (25.2)$$

J_1 и J_2 - моменты инерции вращающихся частей соответственно двигателя и машины, приведенные к оси муфты; T_{max} - максимальное значение крутящего момента.

Выбранные муфты при необходимости проверяют на прочность (силовые передачи) и на кинематическую точность (в приборных передачах).

25.2 Глухие муфты

Глухие муфты образуют неподвижное (жесткое) соединение валов. Достоинства муфт составляют простота конструкции, большая нагрузочная способность, отсутствие мертвого хода, удобства монтажа и демонтажа, хорошая центровка валов; к недостаткам относятся: высокие требования к соосности валов, необходимость в осевых перемещениях при монтаже и демонтаже (для некоторых типов глухих муфт).

а) Втулочная муфта (рис. 25.3) является наиболее простой по конструкции, широко применяется в силовых и кинематических передачах. Она состоит из втулки, которая соединяется с концами валов с помощью шпонок, штифтов и шлицев.

Нагрузочная способность муфты определяется прочностью элементов соединений, расчет которых рассмотрен в главе 4, а также прочностью втулки, которую рассчитывают по напряжению кручения

$$t_{кр} = \frac{Tk}{W_p} = \frac{Tk}{0,2D^3 (1 - d^4 / D^4)} \leq [t_{кр}] \quad (25.3)$$

;

где D и d - наружный и внутренний диаметр втулки; $[t_{кр}]$ - допускаемое напряжение при кручении, принимаемое для втулки $[t_{кр}] = 25$ МПа.

При проектировании размеры муфты обычно выбирают в зависимости от диаметра вала, пользуясь следующими соотношениями: диаметр втулки $D = (1,4 - 1,5)d$, длина втулки $L = (3,5 - 4)d$.

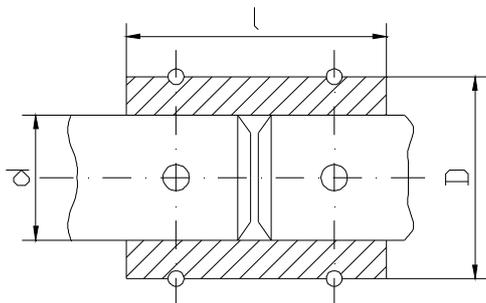


Рис. 25.3

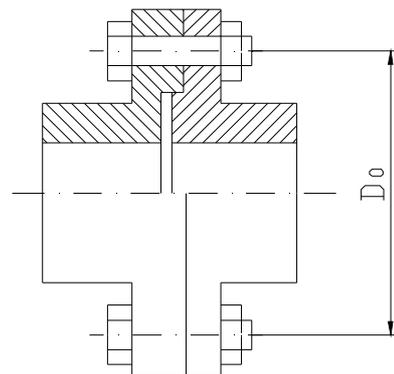


Рис. 25.4

Втулочные муфты могут быть использованы в качестве предохранительных. В этом случае штифты изготавливают из термически обработанной стали, а втулки и концы соединяемых валов закаливают. Расчет ведут на срез штифтов по максимальному моменту $T_{max} = (1,25 - 1,5)T$:

$$t_{cp} = \frac{4T_{max}}{d_{шт}^2} = t_{\sigma} ; \quad (25.4)$$

где $d_{шт}$ - диаметр штифта (определяемая величина): t_{σ} - предел прочности материала штифта на срез.

б) Дисковая (фланцевая, поперечношвертная) муфта (рис. 25.4).

На концах соединяемых валов установлены полумуфты (диски, фланцы), которые соединены между собой болтами. Последние могут быть поставлены в отверстия с зазором или без зазора. Полумуфты на валах закреплены с помощью шпонок или штифтов.

При установке болтов с зазором крутящий момент передается за счет сил трения, возникающих в стыке дисков. Величина необходимого усилия затяжки болтов $F_{зат}$ определяется из следующего условия:

$$T_{тр} \geq T_p$$

или

$$T_{тр} = fF_{зат} \frac{D_0}{2} z = T_p k_c ,$$

откуда

$$F_{зат} = \frac{2k_c T_p}{f D_0 z} ; \quad (25.5)$$

где $T_{тр}$ - момент трения в стыке полумуфты; f - коэффициент трения; D_0 - диаметр расположения болтов; z - количество болтов; $k_c = 1,5-2,0$.

По величине усилия $F_{зат}$ рассчитываются болты. Для лучшего центрирования полумуфты снабжаются центрирующими выступами.

При установке болтов без зазора крутящий момент передается с одной полумуфты на другую непосредственно через болты, которые в этом случае испытывают деформацию среза и смятия под действием окружного усилия на диаметре D_0 . Окружное усилие, приходящееся на один болт, равно

$$F_t = \frac{2T_p}{D_0 z} ; \quad (25.6)$$

По величине силы F_t определяются необходимые размеры (и количество) болтов из условия прочности на срез и смятие; методика таких расчетов рассмотрена в главе 4. Болты, поставленные без зазора, одновременно выполняют роль центрирующих элементов. Установка болтов без зазора предпочтительна, так как она позволяет получить муфты меньших размеров и веса.

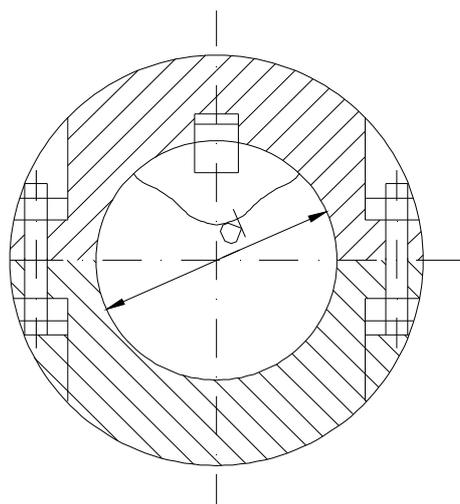


Рис. 25.5

в) Продольно-свертная (клеммовая) муфта (рис. 25.5) состоит из разрезной втулки, половинки которой устанавливают на концы соединяемых валов и скрепляют болтами. Крутящий момент передается с помощью сил трения на опорных поверхностях полумуфт, возникающих от затяжки болтов. Шпонки устанавливаются для большей надежности соединений, при расчете несущей способности муфт шпонки не учитываются.

Достоинствами муфт являются: простота конструкции, возможность установки и снятия полумуфт без осевого перемещения узлов (концов вала). К недостаткам относятся: низкая нагрузочная способность, большие габаритные размеры, неуравновешенность вращающихся частей. Отмеченные недостатки существенны, поэтому область применения продольно-свертных муфт ограничена.

25.3 Компенсирующие муфты

Погрешности изготовления и монтажа узлов приводят к появлению неточности взаимного расположения осей соединяемых концов валов. Отклонения взаимного расположения осей валов от идеального I на рис. 25.6 называют несоосностью. Несоосность бывает трех видов, представленных на рис 25,6: 2 - продольная

Δl , 3 - радиальная Δr , 4 – угловая ΔJ ; чаще встречается несоосность комбинированная 5, включающая продольную, радиальную и угловую.

Глухие муфты не могут компенсировать несоосности, поэтому при их использовании требуется высокая точность расположения валов, в противном случае валы и опоры испытывают дополнительные нагрузки и быстрее выходят из строя. Для снижения требований к точности расположения валов, а также для уменьшения вредных дополнительных нагрузок, возникающих вследствие несоосности, применяют компенсирующие муфты. Компенсация несоосности валов в муфтах достигается за счет подвижности жестких элементов (компенсирующие жесткие муфты) или деформации упругих элементов (компенсирующие упругие муфты).

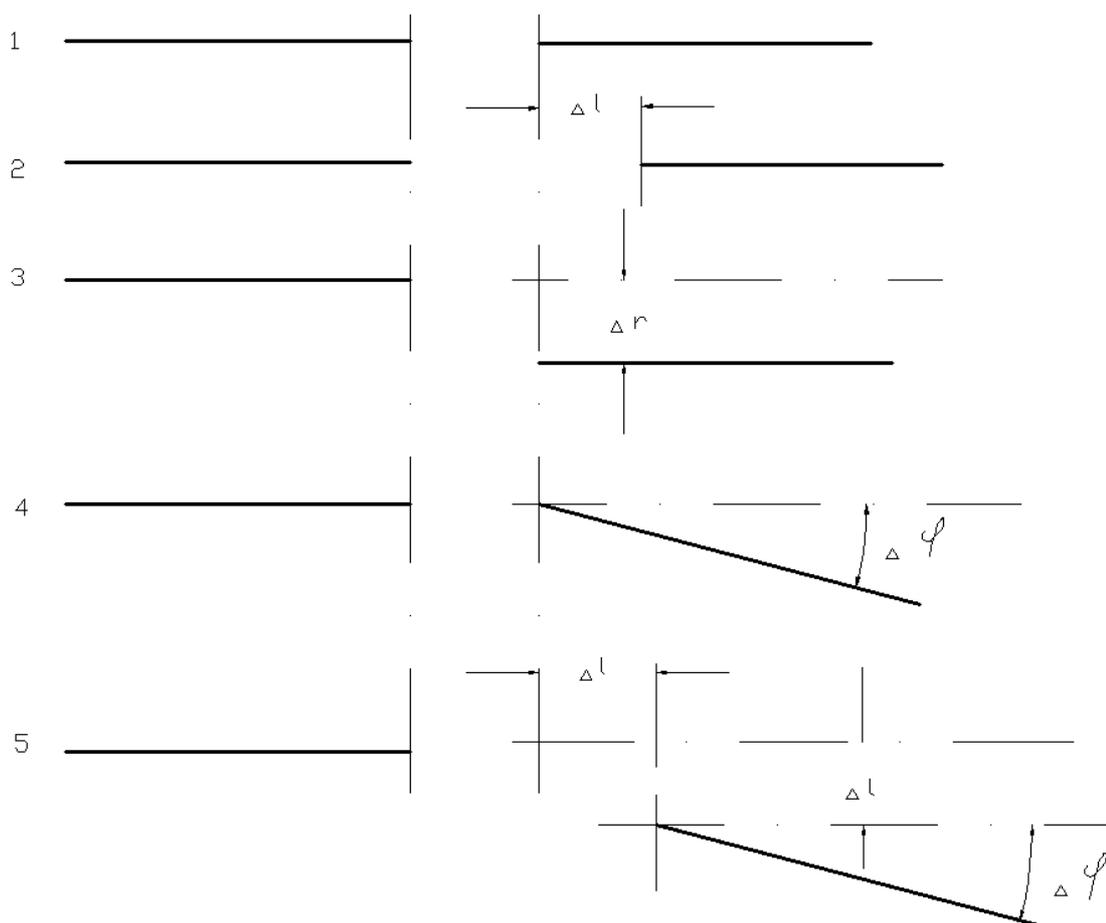


Рис. 25.6

25.4 Компенсирующие жесткие муфты

Поводковые муфты (рис. 25.7) применяются при незначительных несоосностях. Простейшая однопальцевая муфта показана на рис. 25.7. Она состоит из двух полумуфт, на одной полумуфте имеется палец, а на второй паз, в которой входит палец.

Достоинствами муфт являются: компенсация несоосности, простота конструкции. К недостаткам относятся: низкая нагрузочная способность, наличие мертвого хода, ошибка в передаваемом угле поворота, компенсация малых несоосностей.

Ошибка в угле поворота определится из соотношения

$$\frac{\sin \Delta j}{\Delta j} = \frac{e}{r}; \quad (25.7)$$

откуда

$$\sin \Delta j = \frac{e}{r} \sin j; \quad (25.8)$$

максимальная ошибка в угле поворота

$$\Delta j_{max} = \arcsin \frac{e}{r}; \quad (25.9)$$

Проверка на прочность проводится из условия работы пальца на изгиб и смятие.

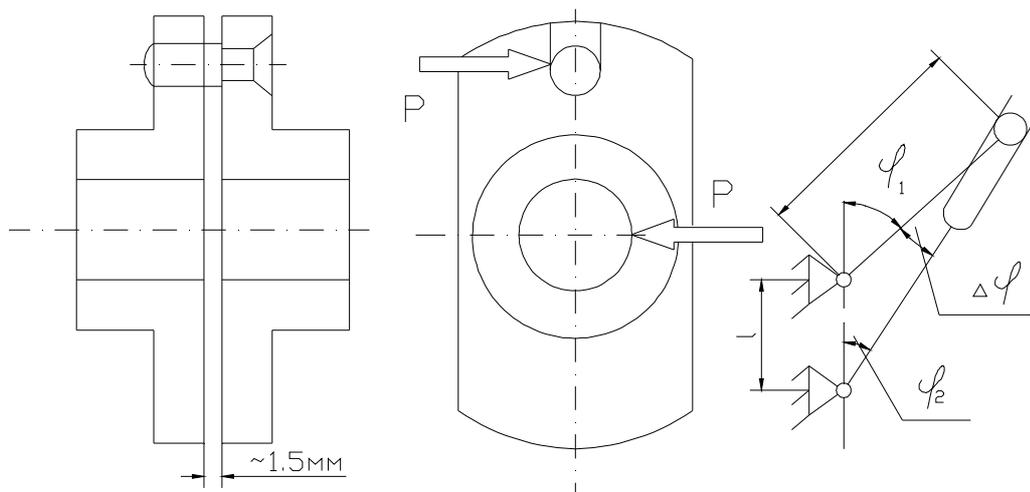


Рис. 25.7

Величина мертвого хода

$$Q = \frac{180}{p} \frac{s}{r} \text{ (град)}, \quad (25.10)$$

где s – зазор в посадке пальца в пазу.

Кулачково-дисковая муфта (рис. 25.8) состоит из двух полумуфт 1 и промежуточного диска - креста 2. На торцах полумуфт имеются диаметрально противоположные пазы, а на обоих торцах диска - выступы, расположенные взаимно перпендикулярно; в собранном виде выступы креста входят в пазы полумуфт.

При наличии несоосности валов диск перемещается в пазах полумуфт. Для уменьшения трения на рабочие поверхности пазов (выступов) подводится смазка. Крестовые муфты обладают сравнительно высокой нагрузочной способностью и малыми габаритами, позволяют компенсировать радиальные отклонения от соосности валов (до $\Delta r = 0,04d$, $\Delta j = 30'$). Муфты широко используются в силовых и кинематических передачах, преимущественное применение - области малых и средних угловых скоростей и мощностей. Недостатками этих муфт являются увеличение мертвого хода по мере износа трущихся поверхностей и значительные потери на трение.

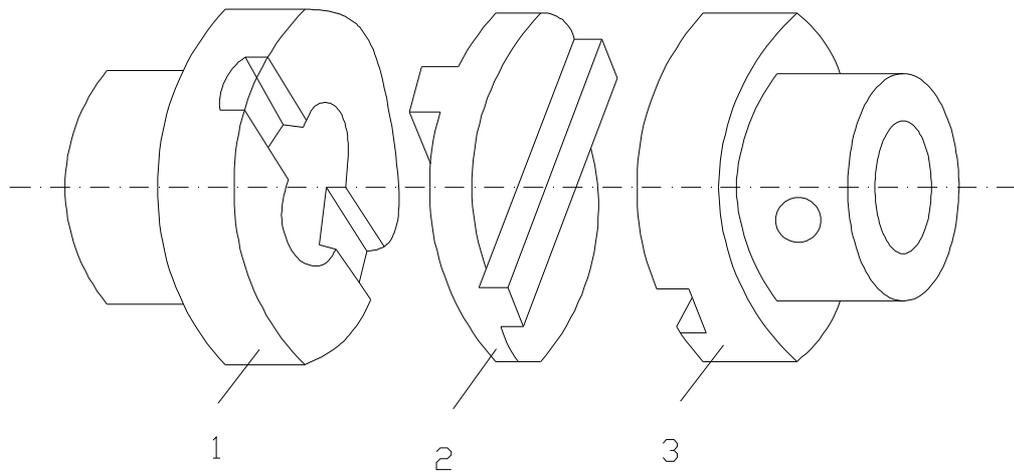


Рис. 25.8

При расчете кулачково-дисковых муфт условно считают, что натяг и зазор посадки выступов в пазы равны нулю. Расчет ведут по напряжениям смятия $[s]$ поверхностей выступов по формуле

$$s = \frac{6TDK}{h(D^3 - d^3)} \leq [s]$$

где D и d - наружный и внутренний диаметры муфты; h - рабочая высота выступов; $[s]$ - допускаемые напряжения, равные $[s] = 15 - 20$ МПа.

25.5 Компенсирующие упругие муфты

Эластичная поводковая муфта (рис. 25.9) применяется при малых мощностях. Она состоит из двух полумуфт, на торцах которых закреплено по два или три пальца. Между полумуфтами находится эластичный элемент – кожаный или резиновый диск, имеющий четыре, или шесть отверстий, в которые входят пальцы полумуфт.

Пальчиковые муфты нормализованы для диаметров валов $d = 3 - 25$ мм. Величина крутящего момента в нормализованных не оговорена, поэтому выбранную

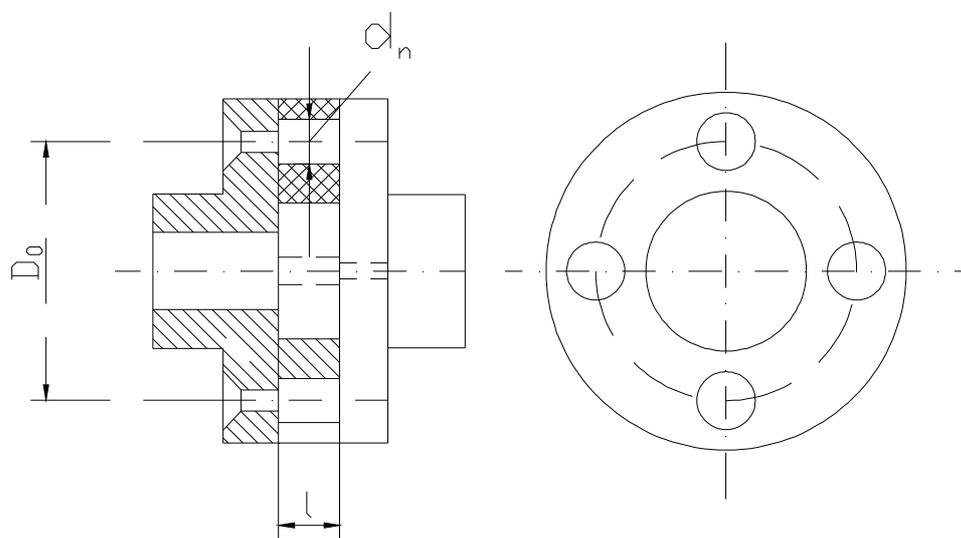


Рис. 25.9

муфту следует проверить по напряжению смятия диска

$$s_{см} = \frac{2Tk}{D_0 z l d_n} \leq [s_{см}], \quad (25.12)$$

где D_0 - диаметр установки пальцев; z - количество пальцев на полумуфте; l - длина линии контакта пальца с диском; d_n - диаметр пальца; $[s_{см}]$ - допускаемые напряжения смятия для кожи и резины $[s_{см}] = 1,6-2,0$ МПа.

Муфта упругая втулочно-пальцевая (МУВП) (рис. 25.10) позволяет компенсировать несоосность, но при больших передаваемых мощностях, чем пальчиковая. МУВП состоит из двух полумуфт, на одной из которых установлены пальцы с упругими элементами - кожаными кольцами или резиновыми втулками. Пальцы входят в отверстия второй полумуфты.

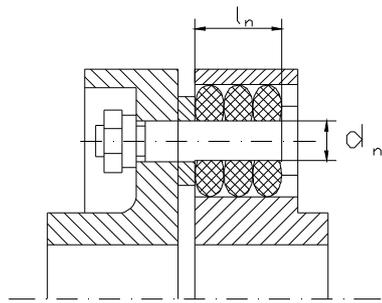


Рис. 25.10

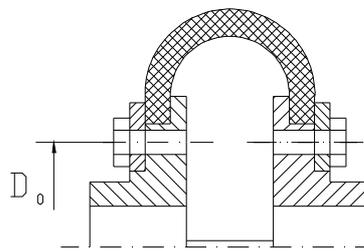


Рис. 25.11

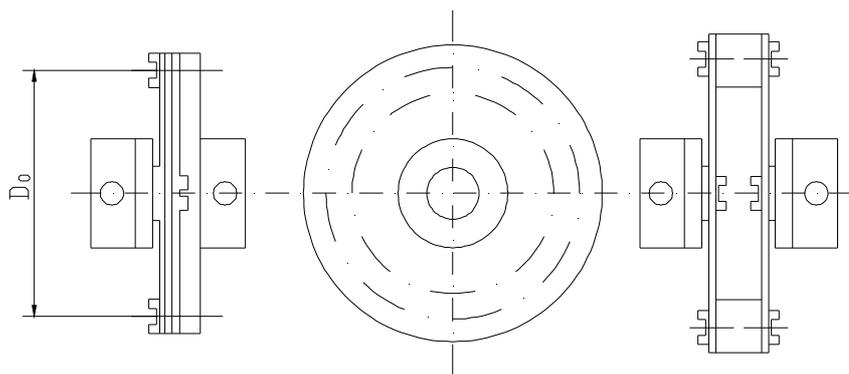


Рис.25.12

Благодаря простоте конструкции, невысокой стоимости, удобству эксплуатации и универсальности эти муфты получили широкое применение для средних мощностей. МУВП нормализованы для диаметров валов $d = 16-150$ мм и крутящих моментов $T = 320-15000$ Нм при частотах вращения $n_{max} = 6300-1120$ об./мин.

Муфта с упругой оболочкой (рис. 25.11) состоит из двух полумуфт, оболочки и соответствующего крепежа. Упругий элемент по форме напоминает автомобильную шину, он работает на кручение. Это придает муфте большую энергоемкость, высокие упругие и компенсирующие свойства: $\Delta r = 2-6$ мм, $\Delta j = 2-6^0$.

Муфта широко применяется при передачах больших мощностей, она стандартизована.

Мембранная муфта (рис. 25.12) широко применяется для передачи малых крутящих моментов (приборные передачи). Она состоит из двух крестовин – полумуфт, соединенных посредством заклепок с кольцевой пружиной – мембраной. Мембранные муфты позволяют компенсировать смещение осей до 0,7 мм и перекос до $2^{\circ}30'$. Эти муфты нормализованы в приборостроении.

25.6 Управляемые муфты

Управляемые (сцепные) муфты используются для соединения и разъединения валов в процессе работы. По принципу сцепления они разделяются на две группы: о жесткой связью - кулачковые, зубчатые, и фрикционные - дисковые, многодисковые, конические, электромагнитные. Сцепные муфты не могут компенсировать несоосности валов, поэтому при их применении требуется высокая соосность.

Фрикционная однодисковая муфта (рис. 25.13). Правая полумуфта установлена неподвижно на валу, левая полумуфта может перемещаться вдоль оси. Для соединения валов к подвижной полумуфте прикладывают силу F с помощью пружины или другого, например, кулачкового прижимного устройства.

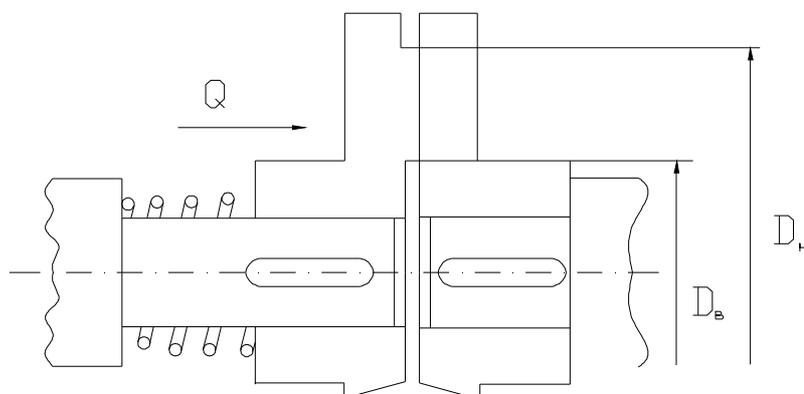


Рис. 25.13

Многодисковая фрикционная муфта (рис. 25.14) применяется с целью уменьшения силы F и габаритов муфты. Здесь используется несколько поверхностей трения вместо одной, применяемой в однодисковой. В таких муфтах имеются две группы дисков – наружные, которые соединены с правой полумуфтой, и внутренние, соединенные с помощью подвижного шлицевого соединения определяют по формуле

$$F = \frac{Tk}{fzR_{mp}}, \quad (25.13)$$

где f – коэффициент трения; z – число трущихся поверхностей; R_{mp} - радиус трения;

$$R_{mp} = \frac{1}{3} \frac{D_n^3 - D_e^3}{D_n^2 - D_e^2} \approx R_{cp} = \frac{D_n + D_e}{4} \quad (25.14)$$

;

D_n и D_e - диаметры наружной и внутренней трущейся поверхности дисков.

Величина силы F ограничивается значением среднего удельного давления p на трущихся поверхностях

$$p = \frac{4F}{p(D_n^2 - D_e^2)} \leq [p]; \quad (25.15)$$

где $[p]$ – допустимое давление, принимаемое в зависимости от материалов трущихся поверхностей равным $[p] = 0,2-1,0$ МПа.

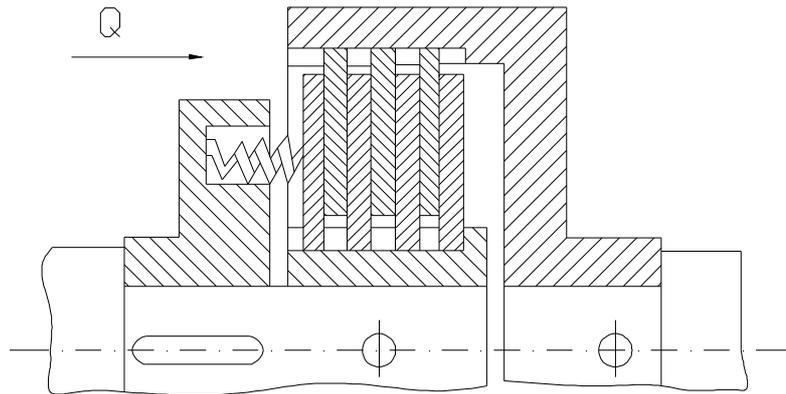


Рис. 25.14

Коническая муфта изображена на рис. 25.15. Конические поверхности трения позволяют создавать на них значительные давления и силы трения при малых усилиях нажатия F . Для устранения самозаклинивания и облегчения расцепления угол l выбирают больше угла трения, т.е.

$$l > r = \operatorname{arctg} f, \quad (25.16)$$

Необходимое усилие прижатия F для конической муфты со средним диаметром трения D_{cp} и шириной b определится из условий равновесия правой полумуфты

$$F = p b p D_{cp} \sin l \quad \text{и} \quad T_k = T_{mp} = p f b p \frac{D_{cp}^2}{2},$$

решая эти уравнения, получим

$$F = \frac{2 T_k \sin l}{f D_{cp}}; \quad (25.17)$$

Величина силы F ограничена условием износостойкости

$$p = \frac{F}{b p D_{cp} \sin l} \leq [p]. \quad (25.18)$$

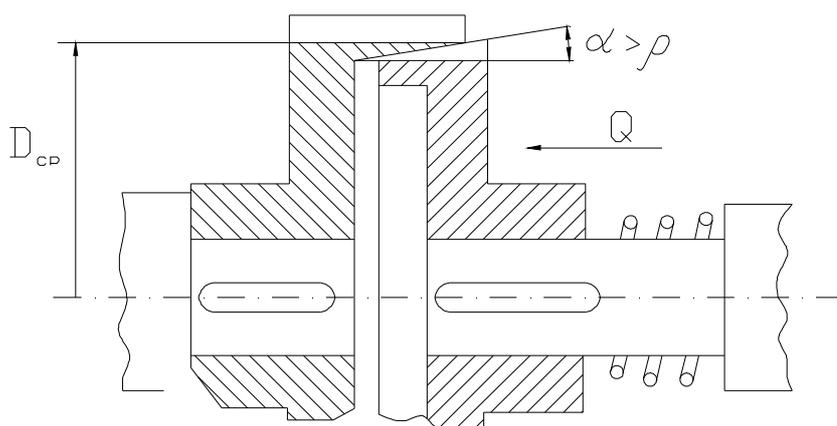


Рис.25.15

Электромагнитная муфта (рис. 25,16) - муфта, в которой сжатие трущихся поверхностей осуществляется встроенным в муфту электромагнитом 1. Достоинства таких муфт: возможность дистанционного управления, быстрдействие. Электромагнит питается постоянным током, который подводится через контактные кольца.

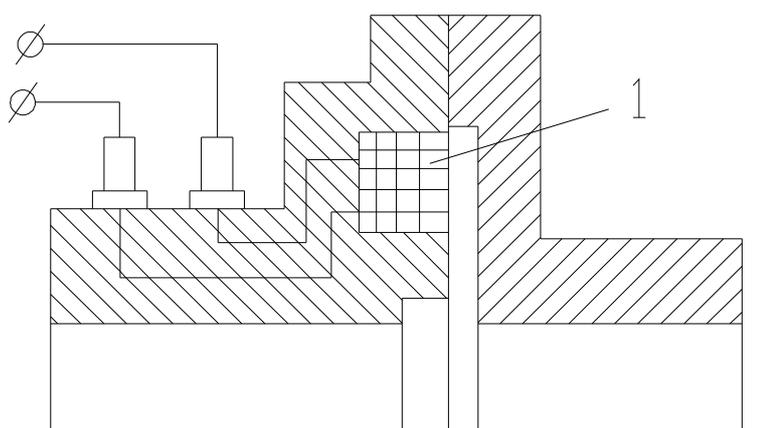


Рис. 25.16

Кулачковая муфта (рис. 25.17) состоит из двух полумуфт с торцевыми кулачками - выступами, входящими во впадины между кулачками сопряженной муфты. Замыкание полумуфт производят отводками (рис.25.17,а) или пружинами (рис.25.17,б).

Для кулачковых муфт характерны малые габаритные размеры и полное отсутствие проскальзывания, однако их можно включать только при остановленных валах, так как включение на ходу сопровождается ударами. При малых нагрузках допускается включение на тихом ходу - при скоростях менее 1 мс^{-1} .

Зубчатая муфта (рис. 25.18) представляет собой внутреннюю зубчатую передачу с равным числом зубьев у шестерни и колеса. Муфта включается при осевом перемещении одной из полу муфт. Для облегчения включения, а также для компенсации несоосностей зубья выполняют бочкообразными.

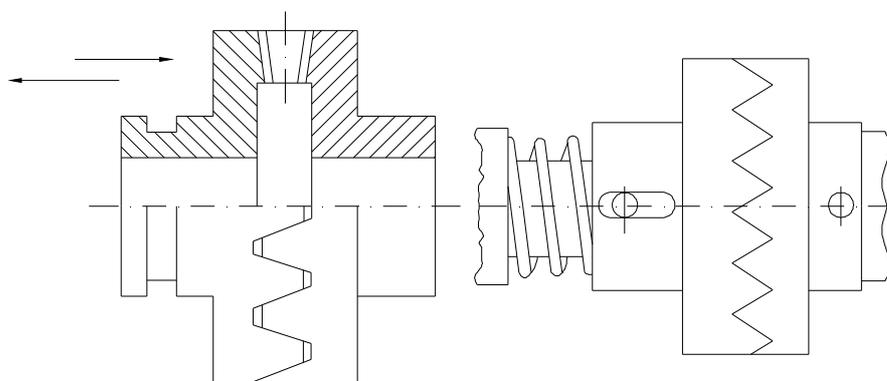


Рис. 25.17

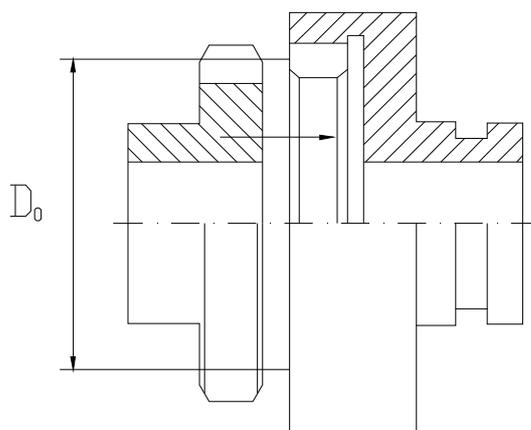


Рис. 25.18

Примечание. Зубчатые муфты изменяют также и в качестве компенсирующих для передачи больших крутящих моментов, такие муфты стандартизованы.

Расчет зубчатых муфт проводят по напряжениям снятия поверхностей зубьев по формуле

$$s = \frac{TK}{0,9D_0^2 b} \leq [s], \quad (25.19)$$

где $D_0 = mz$ (m и z - модуль и число зубьев) - диаметр делительной окружности зубчатого венца муфты; b - длина зубьев венца; $[s]$ - допускаемое напряжения снятия $[s] = 12 - 15$ МПа.

Для проектных расчетов формулу (25.19) преобразовывают к следующему виду

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{TK}{0,9[s]y}}, \quad (25.20)$$

где $y = \frac{b}{D_0}$ - коэффициент ширины зубчатого венца муфты, который принимают равным $y = 0,12 - 0,16$.

Рассмотренные сцепные муфты, включаются и выключаются с помощью осевого перемещения подвижной полумуфты - всякого рода отводками.

25.7 Самоуправляемые (автоматические) муфты

Самоуправляемые муфты служат для автоматического разъединения валов в тех случаях, когда крутящий момент или скорость превышают значения, допустимые по условиям эксплуатации. Конструкции автоматических муфт весьма разнообразны. Рассмотренные сцепные фрикционные (рис. 25,13-5.16) и кулачковые (рис. 25.17.б) муфты могут быть также использованы в качестве самоуправляемых по величине крутящего момента, если усилие прижима F , развиваемое пружиной, рассчитано по величине предельного момента трения. В таких муфтах при перегрузках будет происходить проскальзывание полумуфт с автоматическим разъединением валов. Кулачковые муфты в качестве предохранительных используют для тихоходных и неответственных передач, так как пробуксовывание полумуфт сопровождается ударами и большим шумом.

Муфта предохранительная со срезным пальцем (рис. 25.19). Крутящий момент передается через палец, который при перегрузке срезается; для восстановления работы муфты палец заменяют.

При проектном расчете диаметр пальца d_0 (рис. 25.19) определяют по формуле

$$d_0 = \sqrt{\frac{8TK}{pD_0[t_{cp}]}} \quad (25.21)$$

где D_0 - диаметр окружности, на которой расположен палец; $[t_{cp}]$ - допускаемое напряжение среза, например для закаленного пальца из стали Ст 5 допускают [6] $[t_{cp}] = 420$ МПа.

Центробежные муфты (рис. 25.20) автоматически соединяют валы, когда скорость ведущей полумуфты достигает заданной величины. Принцип работы таких полумуфт следующий. Центробежная сила инерции F_n , возникающая при вращении ведущей полумуфты 1, преодолевая упругое сопротивление пружины 2, создает давление колодок 3 на внутреннюю поверхность обода ведомой полумуфты 4. В результате образуется момент трения, необходимый для передачи вращения. При скорости ведущей полумуфты меньше расчетной центробежная сила инерции колодок недостаточна для создания необходимого момента и движение не передается. При проектировании таких муфт подбираются размеры пружин, масса колодок, а также их количество, при которых обеспечивается передача крутящего момента при заданной угловой скорости.

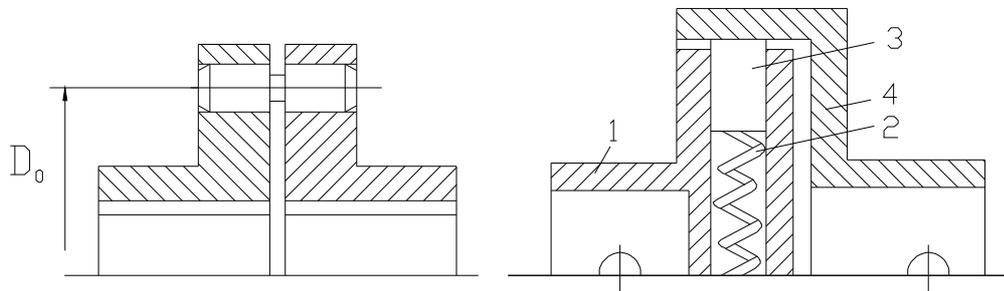


Рис. 25.19

Рис. 25.20

Обгонные муфты (рис.25.21) передают движение только в одном направлении. Роликовые или шариковые обгонные муфты обеспечивают бесшумную работу и обладают достаточно высокой нагрузочной способностью. Такие муфты нормализованы. Принцип работы обгонных муфт состоит в следующем. Звездочка 1 жестко закреплена на одном из валов.

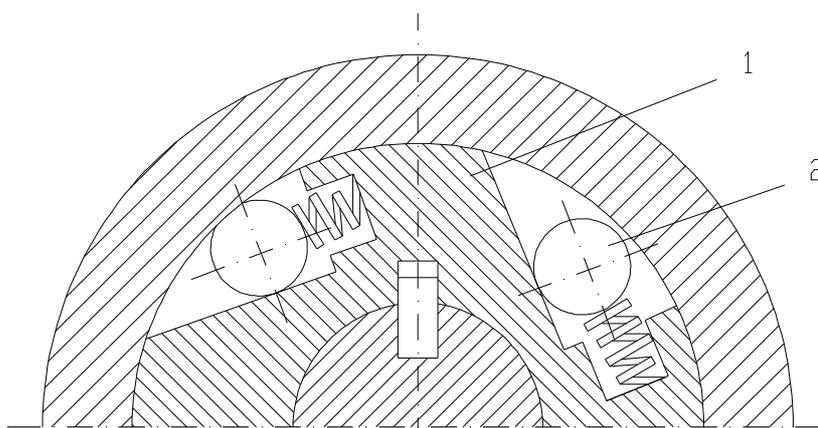


Рис. 25.21

При ее вращении по часовой стрелке (рис. 25.21) ролики 2 под действием силы пружины и сил трения затягиваются в клиновые зазоры и, заклиниваясь, обеспечивают передачу момента со звездочки на ведомую полумуфту.

При вращении звездочки против часовой стрелки относительно ведомой полумуфты ролики выходят в широкую часть клиновых зазоров и валы разъединяются.