Лекция 1

Комплексные числа и действия над ними

1. Понятие комплексного числа

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – некоторые действительные числа; i – символ, называемый *мнимой единицей*, обладающий свойством $i^2 = -1$.

Представление числа z имеет свойство коммутативности: $x + iy = iy + x$. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Модулем $|z|$ комплексного числа z называется действительное неотрицательное число, определяемое выражением

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Число $\overline{z} = x + i(-y) = x - iy$ называют *комплексно сопряжённым* с числом z. Если $y = 0$, число z считается действительным; числа вида $0 + iy \equiv iy$ называются *чисто мнимыми*. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ считаются *равными*, если равны их действительные и мнимые части соответственно:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

Принимается, что для символа i справедливы коммутативный по отношению к умножению и дистрибутивный законы:

$$iy = yi, \ \ i(y_1 + y_2) = iy_1 + iy_2.$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

2. Арифметические операции с комплексными числами

1. Сумма и разность двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i y_2$ определяется по формуле

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)\,.$$

2. Умножение комплексных чисел производится, как умножение многочленов с учётом перечисленных свойств числа i:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) = x_1 x_2 + i\,y_1 x_2 + x_1 i\,y_2 + i\,y_1 i\,y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2). \end{aligned}$$

Заметим, что произведение числа на комплексно сопряжённое с ним есть действительное число, равное квадрату его модуля:

$$z\cdot \overline{z} = (x + iy)\cdot(x - i\,y) = x^2 + y^2 = |z|^2. \qquad (1)$$

3. Частное двух комплексных чисел $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ по определению есть решение уравнения $z\cdot z_2 = z_1$.

а) При делении комплексного числа z_1 на действительное x_2, очевидно, имеем:

$$z = \frac{z_1}{x_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_2} + i\frac{y_1}{x_2}\ .$$

б) Деление на произвольное комплексное число $z_2 \neq 0$ можно свести к делению на действительное число, домножив и числитель, и знаменатель на число, комплексно сопряжённое знаменателю, и воспользовавшись тождеством (1.1):

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\ . \qquad (2)$$

Пример.

$$\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{2\cdot 3+3i\cdot 3-2\cdot 4i-3i\cdot 4i}{3^2+4^2}=$$

$$=\frac{6-12i^2+9i-8i}{25}=\frac{6+12+i}{25}=\frac{18}{25}+i\frac{1}{25}.$$

Несложно проверить, что введенные выше операции сложения и умножения над комплексными числами обладают свойствами:

а) Ассоциативности

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3); \quad (z_1\cdot z_2)z_3=z_1(z_2\cdot z_3).$$

б) Коммутативности $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

в) Дистрибутивности $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Перечислим также свойства операции комплексного сопряжения:

$$\overline{\overline{z}}=z\,,\ \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}\,,\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\,,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости

Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Всякое комплексное число $z=x+iy$ изображается точкой на плоскости с координатами x и y (рис.1.1).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображают комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*. Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке O и проекциями x и y на координатные оси. Длина вектора z равна $\sqrt{x^2+y^2}$ – модулю комплексного числа, в этом состоит геометрический смысл модуля комплексного числа $|z|$. Из

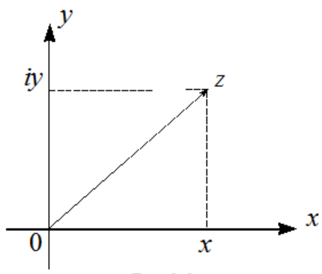

Рис.1.1.

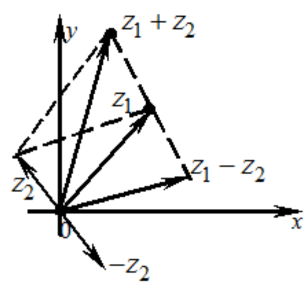

Рис.1.2.

геометрической интерпретации комплексных чисел следует ряд полезных выводов и неравенств (рис.1.2).

1) $|\operatorname{Re} z_1| \le |z_1|, |\operatorname{Im} z_1| \le |z_1|$.

2) $|z_1 - z_2|$ – расстояние между точками z_1 и z_2.

3) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (неравенства треугольника).

4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки на комплексной плоскости z однозначно определяется расстоянием точки от начала координат $r = |z|$ и углом φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (рис.1.3). Этот угол называется *аргументом комплексного числа* $z (z \ne 0)$, и обозначается $\arg(z)$. Для числа z=0 $\arg(z)$ не определен. Из рис.1.3 видно, что

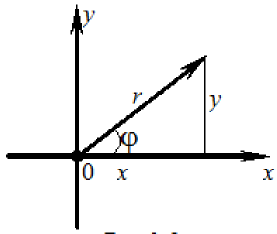

Рис.1.3.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi. \qquad (3)$$

Следовательно, любое комплексное число $z \ne 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (4)$$

Запись комплексного числа в виде (1.4) называется *тригонометрической формой комплексного числа*, в отличие от записи комплексного числа в виде $z = x + iy$, которая называется *алгебраической формой комплексного числа*. Для нахождения аргумента комплексного числа надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \qquad (5)$$

Система (1.5) имеет бесконечно много решений, задаваемых формулой $\varphi = \alpha + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ где α – значение аргумента z, удовлетворяющее условию $-\pi < \alpha \le \pi$. Это значение называется *главным значением аргумента* и обозначается arg z. Все значения аргумента данного комплексного числа задаются функцией, называемой *многозначным аргументом*:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (6)$$

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ x > 0; & (а) \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi,\ x < 0, y \ge 0; & (б) \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi,\ x < 0, y < 0, & (в) \\ \dfrac{\pi}{2},\ x = 0, y > 0, & (г) \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x = 0, y < 0. & (д) \end{cases} \qquad (7)$$

Действительно, так как $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \in (-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2})$, то:

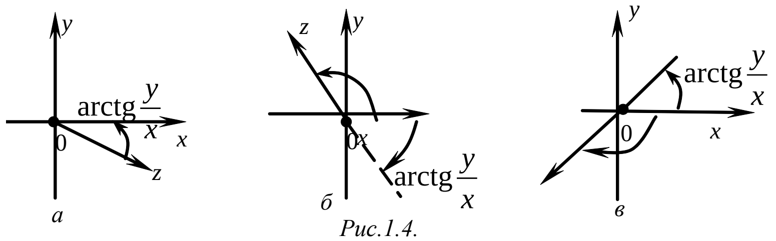

Рис.1.4.

а) если точка лежит в I или IV четверти $(x > 0)$, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (рис.1.4*а*)

б) Если z лежит во второй четверти $(x < 0, y \ge 0)$, то $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \le 0$ и $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (рис.1.4*б*)

в) если z находится в III четверти (x <0, y <0), то $0 < \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$ и $\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (рис.1.4*в*);

г) и *д*) варианты формулы (1.7) очевидны.

С помощью тригонометрической формы (1.4) комплексного числа несложно установить, как изменяются модуль и аргумент комплексного числа при умножении или делении на другое комплексное число, а также при возведении его в целую степень. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда, используя формулы элементарной тригонометрии, получаем:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \tag{8}$$

т.е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда сразу получаем, что при делении на действительное число аргумент не изменяется, поскольку это равносильно умножению на обратное ему, также действительное число. Далее, поскольку

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \tag{9}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2}{r_2^2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = \\ = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \end{aligned} \tag{10}$$

т.е. модуль частного двух комплексных чисел есть частное их модулей, а аргумент частного – разность аргументов. Из (1.8) и (1.10) следует формула, удобная для возведения комплексного числа в произвольную целую степень:

$$z^n = r^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Замечание. Главное значение аргумента произведения или частного двух чисел может отличаться от суммы или разности аргументов на $\pm 2\pi$.

4. Показательная форма комплексного числа

Полагая $r_1 = r_2 = r = 1$ в формулах (1.8), (1.10), (1.11), найдём, что выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обладает свойствами показательной функции, в частности справедлива *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$

Более того, поскольку

$$\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

а также $\cos 0 + i\sin 0 = 1$, выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ имеет такое же разложение в ряд Тейлора по степеням φ, как и показательная функция $e^{i\varphi}$(экспонента с чисто мнимым показателем), если считать правила дифференцирования показательной функции по действительному аргументу справедливыми и для экспоненты с комплексным коэффициентом в показателе (это будет показано позже). Поэтому выражение $\cos\varphi + i\sin\varphi$ принимается за определение функции $e^{i\varphi}$ при произвольном действительном φ:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (13)$$

Перечислим свойства функции $e^{i\varphi}$.

1. Периодичность с периодом $T = 2\pi$.
2. $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$.
3. $\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$. (14)
4. $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$. (15)

Из (1.13) и (1.14) сложением и вычитанием получим формулы Эйлера:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{16}$$

Используя (1.13), представление (1.4) комплексного числа можно переписать в виде, который называется *показательной формой комплексного числа*:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{17}$$

В показательной форме удобно проводить операции умножения и деления комплексных чисел.

Замечание. С помощью формулы Муавра можно получить различные тригонометрические равенства. Получим формулы для $\cos 3\varphi, \sin 3\varphi$. Для этого запишем равенство $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$. Преобразуем левую часть равенства

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Из условия равенства комплексных чисел находим:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

После преобразований, учитывая, что $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, получим искомые равенства

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

6. Извлечение корня *n*-ой степени из комплексного числа

Пусть n – натуральное число, а z – заданное комплексное число. Определим $\sqrt[n]{z} = w$ так, что

$$w^n = z. \tag{18}$$

Пусть $w = |w|e^{i\psi}$, тогда

$$w^n = |w|^n e^{in\psi} = z = |z| e^{i\arg z}. \qquad (19)$$

Из равенства (1.19) следуют равенства

$$|w|^n = |z|, \quad n\psi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

второе из которых есть следствие многозначности аргумента. Выражая $|w|$ и ψ, получим

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \psi = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\sqrt[n]{|z|}$ – обычный арифметический корень n-й степени из положительного числа. Таким образом, для решений уравнения (1.18) имеем

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \qquad (20)$$

Выясним, сколько существует различных значений корня $\sqrt[n]{z}$. Подставляя в формулу (1.20) $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получим n различных значений $\sqrt[n]{z}$. Эти значения различны, так как разность аргументов каждых двух из них не кратна 2π. Поэтому, зная один корень w_0, остальные можно получить последовательными поворотами на угол $\frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки. При всех остальных целых k по формуле (1.20) будут получаться значения, совпадающие с одним из корней при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Например, при $k = n$ получим то же значение, что и при $k = 0$ и т.д. Таким образом, корень n-й степени из произвольного комплексного числа $z \neq 0$ имеет ровно n значений, которые определяются формулой

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (21)$$

Пример. Найти все различные значения корня $\sqrt[3]{-27}$.

Решение. Обозначим $z = -27$, тогда $|z|=27$, $\arg z = \arg(-27) = \pi$, имеем

$$w_k = \sqrt[3]{27}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right),\ k = 0,1,2\,.$$

Найдем значения w_k:

$$k = 0,\ w_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$k = 1,\ w_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = -3;$$

$$k = 2,\ w_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Изобразим эти числа на комплексной плоскости (рис.1.5). Точки w_0, w_1, w_2 – вершины правильного треугольника.

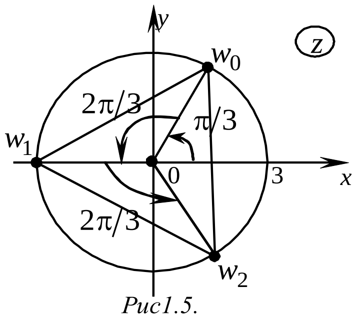

Рис1.5.

7. Множества точек на комплексной плоскости

Комплексные числа можно рассматривать как элементы линейного нормированного пространства с нормой $\|z\| = |z|$. Расстояние между двумя комплексными числами z_1 и z_2 определяется как норма их разности, т.е.

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|. \tag{22}$$

Из (22) следует, что уравнение $|z - z_0| = R$ задаёт множество точек z плоскости, находящихся на расстоянии R от фиксированной точки z_0, т.е. окружность радиусом R с центром в точке z_0. Соответственно, неравенство $|z - z_0| \le R$ задаёт круг радиусом R с центром в точке z_0, а неравенство $|z - z_0| > R$ – внешность этого круга. Двойное неравенство $R_1 \le |z - z_0| \le R_2$ задаёт кольцо между окружностями радиусами R_1 и R_2 с центром в точке z_0.

Аналогичным образом, записывая условия на аргумент, действительную или мнимую часть комплексного числа, можно задавать некоторые множества точек. Например, уравнение $\arg z = \alpha$ задаёт луч, выходящий из начала координат и образующий угол α с положительным направлением действительной оси; неравенство $\operatorname{Im} z \le b$ задаёт полуплоскость, ограниченную сверху прямой $y = b$.

Определение 1. ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек z комплексной плоскости таких, что $|z - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

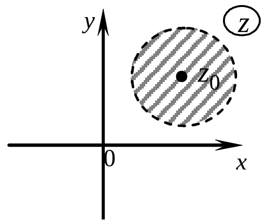

Рис 1.6

Условимся ее обозначить символом $U_{z_0}^{\varepsilon}$: $U_{z_0}^{\varepsilon} = \{z \;\big|\, |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Геометрически $U_{z_0}^{\varepsilon}$ представляет собой внутренность круга радиусом ε с центром в точке z_0 (рис. 1.6).

8. Последовательности комплексных чисел

Определение 2. Комплексное число a называется *пределом последовательности* комплексных чисел $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N$ выполняется $|z_n - a| < \varepsilon.$ Обозначают $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a.$ Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Каждой последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, ...$ Справедлива

Теорема 1. Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a = \alpha + i\beta$, равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta.$$

Доказательство вытекает из определения предела и из неравенств

$|\operatorname{Re} z| \le |z|, |\operatorname{Im} z| \le |z|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Из теоремы 1 следует, что сходящиеся последовательности комплексных чисел обладают такими же свойствами по отношению к арифметическим операциям, что и действительнозначные последовательности, например $\lim\limits_{n\to\infty} z_n\zeta_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n$.

Если члены последовательности представлены в тригонометрической (экспоненциальной) форме, наряду с данной последовательностью можно рассмотреть последовательности модулей и аргументов её членов. Справедливы утверждения:

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$. (Очевидно из геометрических соображений).
2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{i\alpha}$. (Достаточное условие сходимости). Следует из формулы $z_n = r_n \cos\varphi_n + i r_n \sin\varphi_n$ и теоремы 1.

Заметим, что из сходимости последовательности комплексных чисел, вообще, не следует сходимость последовательности их аргументов.

Определение 3. Последовательность $\{z_n\}$ называется ограниченной, если $\exists R, \forall n: |z_n| < R$.

9. Бесконечно удалённая точка

Понятие *бесконечность* или *бесконечно удалённая точка* вводится с помощью следующего определения:

Определение 4. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *сходящейся к бесконечности* (или *бесконечно большой последовательностью*), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$

если $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

Из этого определения следует

Определение 5. Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|z| = R > 0$, называют *R-окрестностью бесконечно удаленной точки*, и обозначают U_∞^R. Бесконечно удаленную точку обозначают символом ∞, а комплексная плоскость z, вместе с точкой $z = \infty$ называется *расширенной комплексной плоскостью*.

Согласно определению, бесконечно удалённая точка как бы «размазана» по всем направлениям и не имеет аргумента, как и точка $z = 0$.

Из свойств бесконечно больших комплекснозначных последовательностей по отношению к арифметическим операциям, которые аналогичны свойствам бесконечно больших действительнозначных последовательностей, вытекают свойства бесконечно удалённой точки:

$$z \pm \infty = \infty,\ \infty \cdot z = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ \frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{z} = \infty,\ \frac{z}{0} = \infty.$$

Операции $0 \cdot \infty$, $\infty \pm \infty$, $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$ не имеют смысла. Для получения геометрического изображения бесконечно удаленной точки z=∞, используют сферу радиуса 1 – *сферу Римана* (рис.1.7). Каждая точка M_1 сферы – образ точки M комплексной плоскости, которая является пересечением прямой NM_1 с комплексной плоскостью, где N – верхний полюс сферы. При удалении M в бесконечность по любому направлению, соответствующие точки M_1 на сфере будут

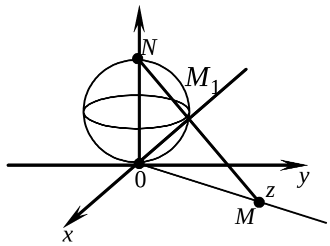

Рис 1.7

стремиться к N, т.е. точка N – изображение на сфере бесконечно удаленной точки комплексной плоскости $z = \infty$. Наглядным представлением расширенной комплексной плоскости является вся сфера. Данное соответствие между точками комплексной плоскости и точками на сфере Римана называется *стереографической проекцией*. Комплексная плоскость, образованная лишь конечными точками, представляется сферой Римана, из которой исключена одна точка N.

Основная литература

1. И. В. Лавров, А. М. Терещенко. Теория функций комплексной переменной: Учеб. пособие / Министерство образования и науки РФ, Национальный исследовательский университет "МИЭТ". - 2-е изд. - М. : МИЭТ, 2015. - 168 с. - ISBN 978-5-7256-0788-8. 517.53(075.8) - Л-136 (стр. 5-21) http://emirs.miet.ru/oroks-miet/upload/normal1/00s8qsquc0tc4v/Lavrov_Tereschenko_TFKP_2015.pdf
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной [Текст]: Учебник для вузов / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова. - 6-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2010. - 336 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 5). - ISBN 978-5-9221-0133-2. 517.53(075.8) - С-245

Дополнительная литература

1. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Электронный ресурс] : Учеб. пособие / - СПб. : Лань, 2010. - 608 с. - Доступ к электронной версии книги открыт на сайте http://e.lanbook.com/. - ISBN 978-5- 8114-0906-8. ЭБС Лань (стр. 466-470)
2. Видео-лекция от проекта «Лекторий» по теме «Комплексные числа» http://lectoriy.mipt.ru/lecture/Maths-ComplexAnalys-L01-Karlov-130904.03