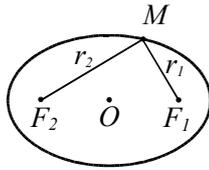


## Глава 5. Кривые и поверхности второго порядка

### §1. Эллипс, гипербола и парабола



#### Эллипс

**Эллипсом** называется множество точек  $M$  (на плоскости), сумма расстояний от которых до двух данных точек  $F_1, F_2$  этой плоскости равно заданному положительному числу  $2a$ :  $MF_1 + MF_2 = 2a$ .

**Примечание:** предполагается, что  $2a > F_1F_2$ .

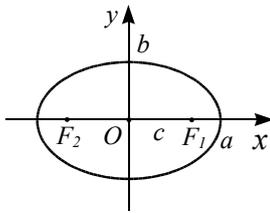
Точки  $F_1, F_2$  называются **фокусами** эллипса.

**Центр** эллипса – середина отрезка, соединяющего фокусы.

Центр эллипса является его центром симметрии.

**Площадь эллипса:**  $S = \pi ab$ .

#### Уравнение эллипса в канонической системе координат



Если начало координат поместить в центр эллипса, а ось абсцисс выбрать так, чтобы она содержала фокусы, то уравнение эллипса примет вид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a$  и  $b$  – координаты

точки пересечения эллипса с осями координат. Числа  $a$  и  $b$  – **полуоси** эллипса (большая и

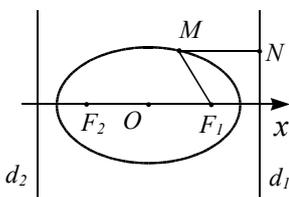
малая).

Если  $F_1F_2 = 2c$ , то  $a^2 - b^2 = c^2$ .

Окружность – частный случай эллипса. Она получается при  $a = b$ .

**Эксцентриситет** эллипса:  $e = c/a$ .

Это число удовлетворяет неравенству  $0 \leq e < 1$  и показывает “степень вытянутости” эллипса. Для окружности  $e = 0$ .



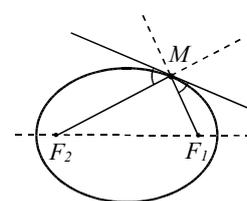
Эллипс, не являющийся окружностью, имеет две **директрисы** – прямые, перпендикулярные прямой  $F_1F_2$  и расположенные на расстоянии  $\frac{a}{e}$  от центра.

Эллипс является геометрическим местом точек, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию

до директрисы равно эксцентриситету:  $\frac{MF_i}{\rho(M, d_i)} = e, i = 1, 2$

#### Оптическое свойство эллипса:

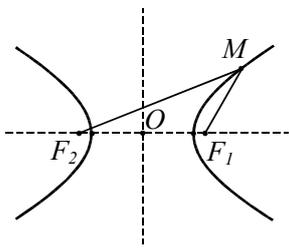
прямая  $l$  касается эллипса в точке  $M$ , фокальные радиусы  $MF_1$  и  $MF_2$  равны углам с касательной  $l$ .  
 словами: лучи света, выпущенные из фокуса, отразившись от эллипса,



Если  $M$ , то образуют Другими одним пройдут

через другой фокус.

## Гипербола



**Гиперболой** называется множество точек  $M$ , разность расстояний от которых до двух данных точек  $F_1, F_2$  равна заданному числу  $2a$ :

$$|MF_2 - MF_1| = 2a.$$

**Примечание:** предполагается, что  $F_1F_2 > 2a$ . Точки  $F_1, F_2$  – **фокусы** гиперболы.

**Центр** гиперболы – середина отрезка  $F_1F_2$ .

Центр гиперболы является ее центром симметрии.

## Уравнение гиперболы в канонической системе координат

Если начало координат поместить в центр гиперболы, а за ось абсцисс принять прямую  $F_1F_2$ , то

уравнение гиперболы примет вид  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где  $a$  и  $b$  – координаты

пересечения гиперболы с осями координат.

Если  $c = OF_1 = OF_2$  – расстояние от

координат до фокуса, то  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Оси  $Ox, Oy$  – **оси гиперболы (действительная и мнимая)**. Числа

$a$  и  $b$  – действительная и мнимая **полуоси**.

Прямые  $y = \frac{b}{a}x$  и  $y = -\frac{b}{a}x$  – **асимптоты** гипер-

болы. Гипербола состоит из двух **ветвей** (одна в полуплоскости  $x > 0$ , другая –  $x < 0$ ).

**Эксцентриситет** гиперболы:  $e = \frac{c}{a}$ . Для ги-

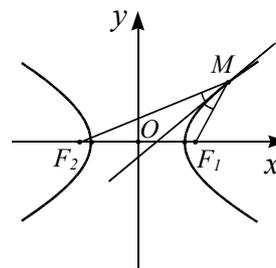
перболы  $e > 1$ .

**Директрисы** – прямые, перпендикулярные действительной оси и расположенные на расстоянии  $\frac{a}{e}$  от центра.

Гипербола является геометрическим местом точек  $M$ , для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно эксцентриситету:

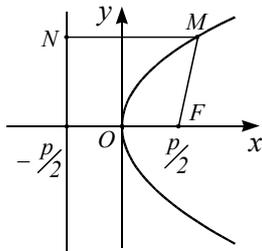
$$\frac{MF_i}{\rho(M, d_i)} = e, i = 1, 2.$$

**Оптическое свойство гиперболы:**



Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами, проведенными в точку касания, т.е. биссектрисой угла  $F_1MF_2$ .

Другими словами: лучи света, выпущенные из фокуса  $F_1$ , отразившись от гиперболы, будут образовывать расходящийся пучок лучей, причем лучи, противоположные отраженным, проходят через фокус  $F_2$ .



### Парабола

**Параболой** называется геометрическое место точек  $M$ , расстояние от которых до данной точки (**фокуса**) равно расстоянию до данной прямой (**директрисы**):  $MF = \rho(M, d)$ , где  $F$  – фокус, а  $d$  – директриса.

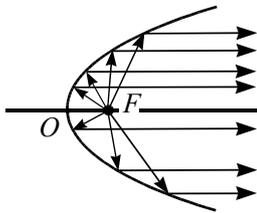
Эксцентриситет параболы считается равным единице:  $e = 1$ .

**Ось** параболы – прямая, проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе. Ось параболы является ее осью симметрии.

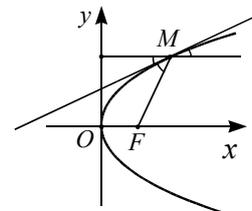
**Вершина** параболы – точка параболы, лежащая на оси.

**Уравнение параболы в канонической системе координат.** Если начало координат поместить в вершину параболы, а ось абсцисс направить по оси параболы от вершины к фокусу, то уравнение параболы примет вид  $y^2 = 2px$ .

Уравнение директрисы:  $x = -\frac{p}{2}$ . Координаты фокуса:  $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ .



**Оптическое свойство параболы:** Касательная к параболе образует равные углы с параболой и фокальным радиусом, проведенным в точку касания.



касания.

Другими словами: лучи света, выпущенные из фокуса параболы, отразившись от нее, будут образовывать пучок прямых, параллельных оси.

## § 2. Приведение к каноническому виду уравнения кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$

причем предполагается, что среди чисел  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  есть хотя бы одно ненулевое.

Существует система координат (называемая **канонической**), в которой уравнение кривой второго порядка имеет вид, приведенный в таблице (**канонический вид**).

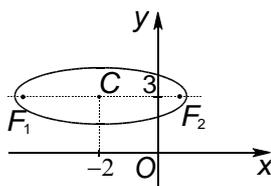
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	гипербола
$y^2 = 2px$	парабола
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллипс (эта “кривая” не имеет действительных точек)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	на действительной плоскости “кривая” имеет лишь одну точку
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	две пересекающиеся прямые
$x^2 = A, A > 0$	две параллельные прямые
$x^2 = 0$	две совпадающие прямые
$x^2 = A, A < 0$	две мнимые параллельные прямые (“кривая” не имеет ни одной действительной точки)

**Задача 1.** Изобразить кривую, найти ее характеристики:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 54y + 76 = 0.$$

*Решение.* Надо привести это уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты по  $x$  и по  $y$ :

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 76 = 0; \quad (x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 9;$$



$$\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{1} = 1. \text{ Следовательно, данная}$$

кривая является эллипсом. Его центр:  $C = (-2; 3)$ . Полуоси:  $a = 3, b = 1$ . Для нахождения координат фокусов находим параметр  $c$  (половину расстояния между фокусами):

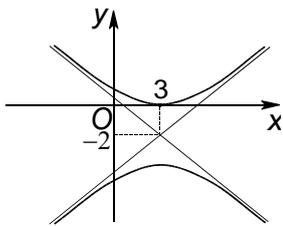
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}. \text{ Отсюда получаем фокусы:}$$

$$F_1 = (-2 - 2\sqrt{2}; 3), \quad F_2 = (-2 + 2\sqrt{2}; 3) \quad \text{Эксцентриситет: } e = c/a = 2\sqrt{2}/3.$$

**Задача 2.** Составить уравнение гиперболы с асимптотами  $y = \pm 0,8(x - 3) - 2$ , касающейся оси  $Ox$ .

*Решение.* Уравнения асимптот гиперболы с центром  $(x_0; y_0)$  имеют вид  $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ . Следовательно, центр гиперболы имеет

координаты

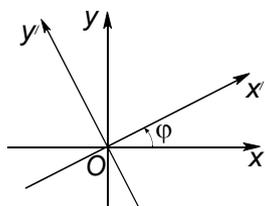


$(3; -2)$  и  $b/a = 0,8$ . Нарисуем гиперболу, учитывая, что она касается оси абсцисс. Из рисунка видно, что  $b = 2$ . Так как  $b/a = 0,8$ , то  $a = 2,5$ . Так как действительная ось гиперболы параллельна оси  $Oy$ , то в правой части уравнения будет  $-1$  вместо  $1$ . Отсюда получаем уравнение:

$$\frac{(x-3)^2}{2,5^2} - \frac{(y-3)^2}{2^2} = -1.$$

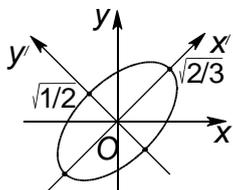
**Задача 3.** Найти площадь области, ограниченной кривой  $2x^2 + xy + 2y^2 = 1$ .

*Решение.* В случае, когда коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  равны друг другу, то поворотом системы координат на угол в  $45^\circ$  можно избавиться от произведения  $xy$  в уравнении кривой. Напишем формулы поворота на угол  $\varphi$ :



$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

(здесь  $x, y$  – координаты точки в исходной системе координат, а  $x', y'$  – координаты той же точки в системе координат, повернутой на угол  $\varphi$ . При  $\varphi = 45^\circ$  получаем прямые и обратные формулы:



$$\begin{cases} x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & \begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{cases} \\ y' = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Подставим обратные формулы в уравнение кривой:

$$2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} + 2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1;$$

$$\frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2} + \frac{x'^2 - y'^2}{2} + \frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} = 1; \quad \frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1;$$

$\frac{x'^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{1/2})^2} = 1$ . Следовательно,  $a = \sqrt{2/3}$ ,  $b = \sqrt{1/2}$ . Отсюда

$$S = \pi ab = \pi / \sqrt{3}.$$

Рисуем оси эллипса, находим отрезки  $a$  и  $b$  (его полуоси). Далее строим отрезок  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  (рис. 5.34) и фокусы  $F_1, F_2$  эллипса.

**Задача 4.** Установить, что уравнение

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

определяет эллипс, найти его центр и полуоси.

*Решение.* Преобразуем это уравнение:

$$5(x^2 - 6x + 9) - 45 + 9(y^2 + 2y + 1) - 9 + 9 = 0, \text{ или}$$

$$5(x-3)^2 + 9(y+1)^2 = 45, \text{ или}$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1.$$

Положим  $\begin{cases} x-3 = x' \\ y+1 = y' \end{cases}$  и уравнение примет вид  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{5} = 1$ . Это уравнение эллипса с полуосями  $a = 3$  и  $b = \sqrt{5}$ .

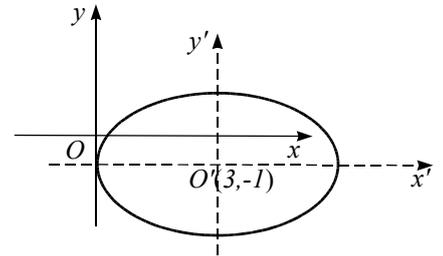


Рис. 5.15

**Задача 5.** Установить, что уравнение  $y = \frac{1}{x}$

определяет гиперболу, найти ее центр и полуоси.

Подберём угол  $\varphi$ , после поворота на который уравнение кривой не будет содержать произведения переменных  $x'$  и  $y'$ . Подставим формулы поворота в заданное уравнение  $y = \frac{1}{x}$ , которое лучше переписать в виде  $xy = 1$ :

$$(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) = 1,$$

$$x'^2 \cos \varphi \sin \varphi - x'y' \sin^2 \varphi + x'y' \cos^2 \varphi - y'^2 \sin \varphi \cos \varphi = 1,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \sin 2\varphi + x'y' \cos 2\varphi = 1.$$

Найдём такой угол  $\varphi$ , чтобы в последнем уравнении не содержалось слагаемое  $x'y'$ . Достаточно положить,  $\cos 2\varphi = 0$ , то есть  $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Тогда преобразование примет вид

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \end{cases}$$

- поворот против часовой стрелки вокруг точки  $O$ , а уравнение кривой (5.28) в новой системе координат:

$$\frac{1}{2} x'^2 - \frac{1}{2} y'^2 = 1$$

- это уравнение гиперболы с полуосями  $a = b = \sqrt{2}$  и центром в точке  $O(0,0)$  (рис. 5.16).

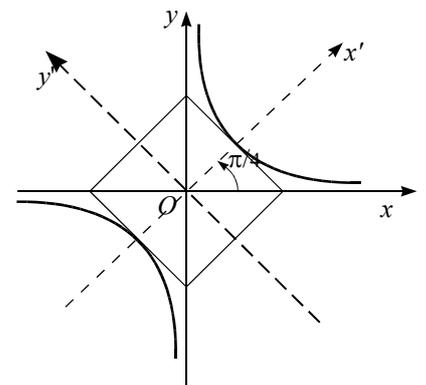


Рис. 5.16

### § 3. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат

**Полярная система координат.** Выберем на плоскости точку  $O$  (*полюс*) и луч  $OA$  с вершиной  $O$  (*полярную ось*) (рис. 5.36). Тогда каждая точка  $M$  плоскости будет характеризоваться двумя чис-

лами:  $\rho = OM$  (полярный радиус) – расстояние от точки  $M$  до полюса и  $\varphi = \angle AOM$  (полярный угол).

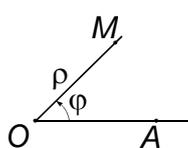


Рис. 5.36

При этом  $\rho \geq 0$  и  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Числа  $\rho, \varphi$  называются полярными координатами точки  $M$ . Используется запись  $M = (\rho, \varphi)$ . Единственная точка, для которой координата  $\varphi$  не определена, – это полюс. Можно считать значение  $\varphi$  в полюсе равным любому за-

данному углу.

Замечание. Иногда считают, что  $-\pi < \varphi \leq \pi$  или  $-\infty < \varphi < +\infty$  (в этом случае координата  $\varphi$  определена неоднозначно). Кроме того, в редких случаях разрешается даже неравенство  $\rho < 0$  (в этом случае точка  $M$  откладывается не на полярном луче, а на луче, противоположном ему).

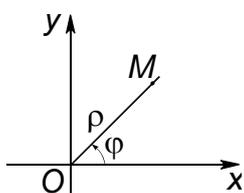


Рис. 5.37

Пусть на плоскости взята декартова система координат  $Oxy$  (рис. 5.37). Примем начало координат за полюс, а ось  $Ox$  за полярную ось. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами точки будет осуществляться по

$$\text{формулам } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Обратные формулы:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \text{ при } y \geq 0 \text{ и } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \text{ при } y < 0.$$

При  $x, y > 0$  можно также написать  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

Примеры полярных уравнений:

1.  $\rho = a$  ( $a > 0$ ) – уравнение окружности радиуса  $a$  с центром в полюсе.

2.  $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$  ( $a = \text{const}$ ) – уравнение прямой  $x = a$ .

3.  $\rho = \frac{A}{1 - e \cos \varphi}$  – уравнение кривой второго порядка (эллипса, ги-

перболы, параболы); здесь  $e$  – эксцентриситет, полюс расположен в одном из фокусов, полярная ось совпадает с одной из главных осей кривой второго порядка (рис. 5.38).

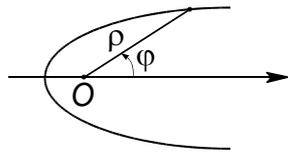


Рис. 5.38

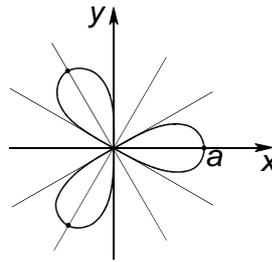


Рис. 5.39

4.  $\rho = a \cos 3\varphi$  – трехлепестковая роза (рис. 5.39).

**Сферическая система координат.** Эта система координат вводится для точек пространства.

Опустим перпендикуляр  $MM'$  из точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  (рис. 5.40). Сферическими координатами точки  $M$  являются:  $\rho = OM$  – полярный радиус,  $\theta = \angle M'OM$  – угол наклона вектора  $\overline{OM}$  к плоскости  $Oxy$ ,  $\varphi$  (азимут) – угол между осью  $Ox$  и вектором  $\overline{OM'}$ .

При этом считается, что  $\rho \geq 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Возможны

другие соглашения о диапазоне изменения координат  $\rho, \varphi, \theta$ .

Связь между декартовыми и сферическими координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

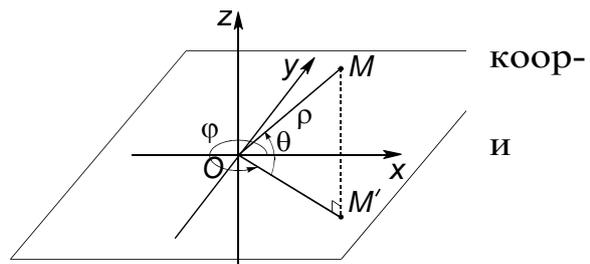


Рис. 5.40

Примеры уравнений в сферической системе координат:

1.  $\rho = a$  – уравнение сферы с центром в начале координат.

2.  $\theta = \theta_0$  – уравнение конуса.      3.  $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$  – уравнение цилиндра.

4.  $\theta = \theta_0$  – уравнение конуса.

**Цилиндрическая система координат** занимает промежуточное положение между декартовой и сферическими системами. Цилиндрическими координатами точки  $M$  пространства являются полярные координаты  $\rho, \varphi$  проекции точки  $M$  на плоскость  $Oxy$  и аппликата  $z$  точки  $M$  (рис. 5.41).

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

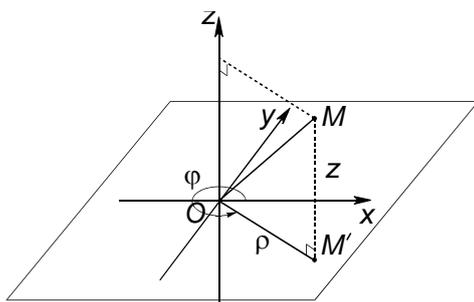


Рис. 5.41

Примеры уравнений поверхностей в цилиндрической системе координат:

1.  $z = k\rho$  ( $k = \text{const}$ ) – уравнение конуса.
2.  $\rho = a$  – уравнение цилиндра.
3. Пусть на плоскости  $Oxz$  дан круг радиуса  $a$  с центром на оси  $Ox$ , причем центр круга находится на расстоянии  $b > a$  от начала координат (см. рис. 5.42). Тело, полученная вращением круга вокруг оси  $Oz$ , носит название *тор* (см. рис. 5.43).

Так как уравнение окружности на плоскости  $Oxz$  имеет вид

$$(x-b)^2 + z^2 = a^2,$$

#### § 4. Поверхности второго порядка

*Поверхности* задаются обычно уравнением вида  $F(x, y, z) = 0$  или, если удастся выразить  $z$  через  $x$  и  $y$ , – уравнением вида  $z = f(x, y)$ . Например, сфера (поверхность шара) задается уравнением  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ , где  $(x_0, y_0, z_0)$  – центр шара,  $R$  – его радиус. Выражая  $z$  через  $x$  и  $y$ , получим две поверхности: *верхнюю полушферу*  $z = z_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$  и *нижнюю полушферу*  $z = z_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$ .

#### Коническая поверхность

Пусть даны плоскость  $\alpha$ , кривая  $C$ , лежащая на ней, и точка  $S$ , не принадлежащая плоскости. **Конической поверхностью** называется поверхность, состоящая из прямых линий  $SA$ , проведенных через точку  $S$  и каждую точку  $A$  кривой  $C$  (см.рис.5.42). Прямые  $SA$  называются **образующими**, точка  $S$  – **вершиной**, а линия  $C$  – **направляющей** конической поверхности.

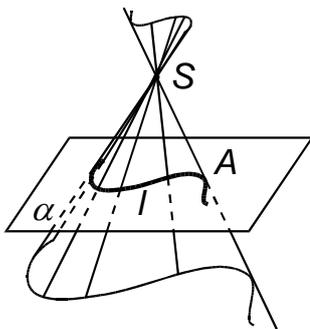


Рис.5.42.

Составим уравнение конической поверхности. Чтобы уравнение было проще, выберем систему координат так, что плоскость  $Oxy$  совпадает с плоскостью  $\alpha$ , а ось  $Oz$  проходит через вершину  $S$ . Пусть кривая  $C$  задается уравнением  $f(x, y) = 0$ , а вершина  $S$  имеет координаты  $(0, 0, c)$ . Если  $M = (x, y, z)$  – точка конической поверхности и прямая  $SM$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $M_1 = (x_1, y_1, 0)$ , то числа  $x_1, y_1$  удовлетворяют уравнению  $f(x_1, y_1) = 0$ . Кроме того,  $\overline{SM} \parallel \overline{SM_1}$ . Так как  $\overline{SM} = (x, y, z - c)$ ,  $\overline{SM_1} = (x_1, y_1, -c)$ , то  $(x, y, z - c) = t(x_1, y_1, -c)$  при некотором  $t \in \mathbb{R}$ . Отсю-

да  $z - c = -tc$ , а значит,  $t = \frac{c-z}{c}$ ,  $x_1 = \frac{x}{t} = \frac{cx}{c-z}$ ,  $y_1 = \frac{y}{t} = \frac{cy}{c-z}$ . Подстав-

ляя в уравнение кривой  $C$ , получим:  $f\left(\frac{xc}{c-z}, \frac{yc}{c-z}\right) = 0$ . Это и есть

искомое уравнение поверхности. Ему удовлетворяют все точки конической поверхности, за исключением вершины  $S$ , и только они.

### Цилиндрическая поверхность

Пусть даны плоскость  $\alpha$ , кривая  $C$ , лежащая на этой плоскости, и прямая  $l$ , не параллельная этой плоскости. **Цилиндрической поверхностью** называется поверхность, состоящая из прямых линий  $AB$ , параллельных прямой  $l$  и пересекающих кривую  $C$  (см.рис.5.43). Прямые  $AB$  называются **образующими**, а линия  $C$  – **направляющей** цилиндрической поверхности.

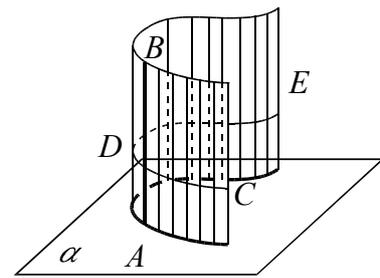


Рис.5.43.

Составим уравнение цилиндрической поверхности. Для простоты предположим, что образующие перпендикулярны плоскости  $\alpha$ . Выберем систему координат так, чтобы плоскость  $Oxy$  совпадала с плоскостью  $\alpha$ . Тогда образующие будут параллельны оси  $Oz$ . Если  $f(x, y) = 0$  – уравнение кривой  $C$ , то такое же уравнение будет определять цилиндрическую поверхность. Отсутствие координаты  $z$  означает, что координата  $z$  может принимать любые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

### Поверхность вращения

Пусть даны плоскость  $\alpha$ , кривая  $C$  на ней и прямая  $l$ , также лежащая в этой плоскости. **Поверхностью вращения** называется поверхность, полученная вращением кривой  $C$  вокруг прямой  $l$ . Выберем систему координат так, чтобы прямая  $l$  совпадала с осью  $Oz$ , а кривая  $C$  находилась в плоскости  $Oxz$ . Тогда, если  $f(x, z) = 0$  – уравнение кривой  $C$ , то уравнение поверхности вращения будет иметь вид  $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$ .

**Поверхностью второго порядка** называют геометрическое место точек, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

причем предполагается, что среди чисел  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  есть хотя бы одно ненулевое.

**Теорема.** Существует система координат, в которой уравнение поверх-

ности второго порядка имеет **канонический вид**.

Приведём изображения поверхностей второго порядка.

1. Эллипсоид (рис.5.17)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2. Гиперболоид

а) однополостный (рис.5.18)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

б) двуполостный (рис.5.19)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

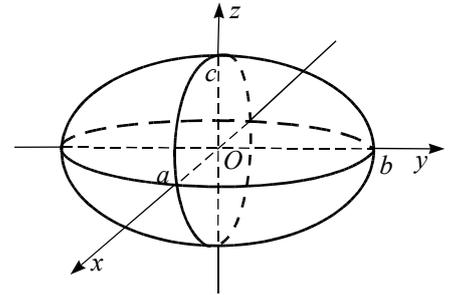


Рис. 5.17

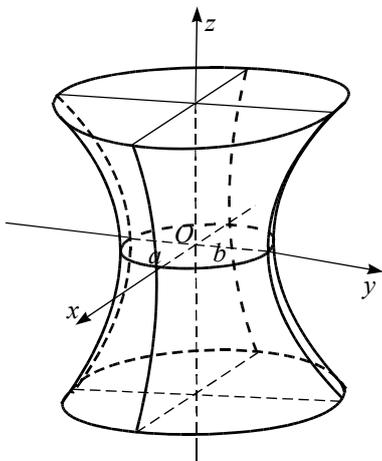


Рис. 5.18

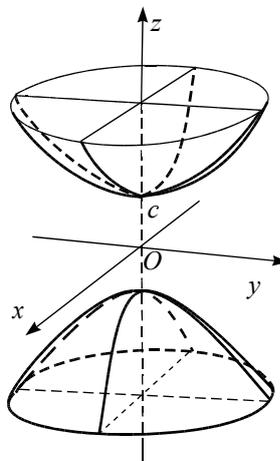


Рис. 5.19

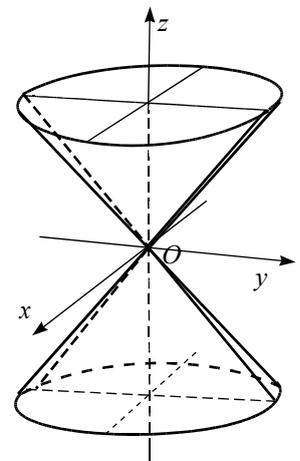


Рис. 5.20

3. Конус второго порядка (рис. 5.20)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4. Параболоид

а) эллиптический (рис. 5.21)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

б) гиперболический (рис. 5.22)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

5. Цилиндр второго порядка (рис. 5.23)

а) эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

б) гиперболический (рис. 5.24)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в) параболический (5.25)

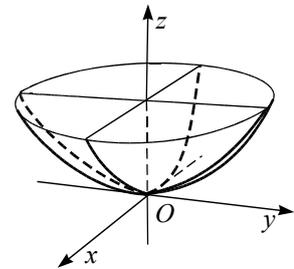


Рис. 5.21

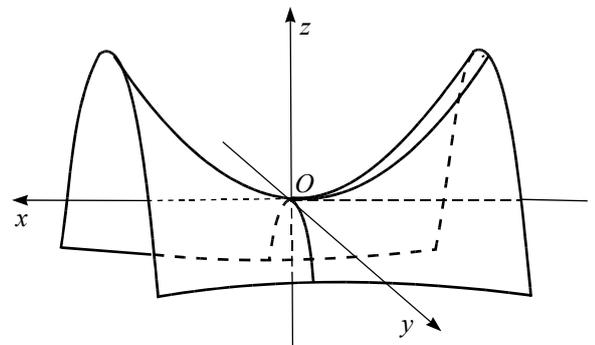


Рис. 5.22

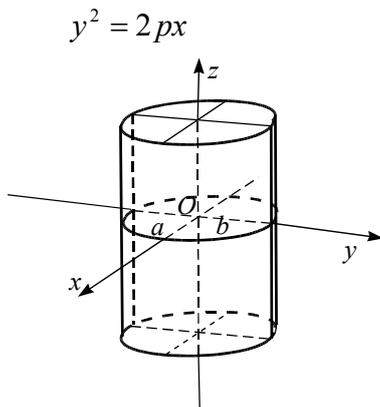


Рис. 5.23

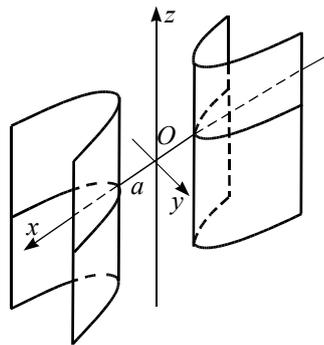


Рис. 5.24

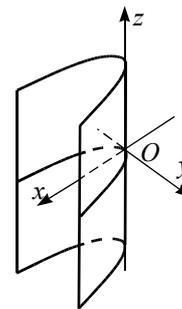


Рис. 5.25

Основным методом исследования формы поверхности по ее уравнению является метод сечений.

Метод сечений заключается в том, что в уравнении поверхности последовательно полагают  $z = \text{const}$ ,  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  (то есть «пересекают» поверхность плоскостями, параллельными координатным) и в зависимости от вида кривой, получающейся в сечении, делают заключение о типе поверхности и ее расположении.

**Задача 6.** Методом сечений исследовать форму и построить поверхность

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$$

*Решение.* Положим  $z = c \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = c$ , или  $\frac{x^2}{9c} + \frac{y^2}{16c} = 1$ .

(5.30)

Отметим, что при  $c < 0$  точек пересечения нет (следовательно, в области  $z < 0$  точек поверхности нет); при  $c > 0$  уравнение (5.30) определяет эллипс с полуосями  $a = 3\sqrt{c}$  и  $b = 4\sqrt{c}$ ; при  $c = 0$  – точка  $O(0,0,0)$  (поверхность проходит через начало координат).

Пусть,  $x = c \Rightarrow \frac{c^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z$ , или  $y^2 = 16z - \frac{16}{9}c^2$ , или  $y^2 = 16\left(z - \frac{1}{9}c^2\right)$  – парабола с  $p = 8$ , смещенная по оси  $OZ$  вверх на  $\frac{1}{9}c^2$ .

Пусть,  $y = c \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{c^2}{16} = z$ , или  $x^2 = 9z - \frac{9}{16}c^2$ , или  $x^2 = 9\left(z - \frac{1}{16}c^2\right)$  – парабола с  $p = \frac{9}{2}$ , смещенная по оси  $OZ$  вверх на  $\frac{1}{16}c^2$ .

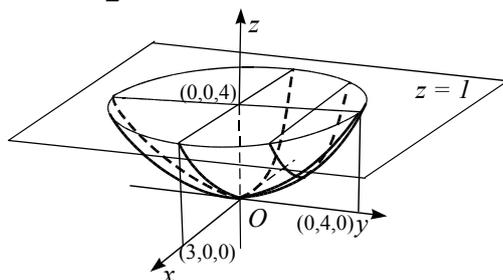


Рис. 5.26

уже

На Рис.5.26.изображен эллипс, получающийся в сечении плоскостью  $z = 1$  (полуоси  $a = 3, b = 4$ ).

Представив общий характер кривых, получающийся в сечении, нетрудно выбрать из девяти поверхностей соответствующую.

Итак, поверхность – эллиптический параболоид (Рис. 5.26.).

Перечислим теперь *вырожденные* и *мнимые* поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$  – *мнимый эллипсоид* (эта “поверхность” не имеет действительных точек);

2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$  – *точка, или мнимый конус с действительной вершиной*;

3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  – *мнимый эллиптический цилиндр* (эта “поверхность” не имеет действительных точек);

4.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  – *пара пересекающихся плоскостей*;

5.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  – *пара мнимых плоскостей с общей действительной прямой*;

6.  $x^2 = A, A > 0$  – *пара параллельных плоскостей*;

7.  $x^2 = A, A < 0$  – *пара мнимых параллельных плоскостей*;

8.  $x^2 = 0$  – *пара совпадающих плоскостей*.

**Задача 7.** Доказать, что однополостный гиперболоид состоит целиком из прямых линий, т.е. через каждую точку этой поверхности проходит прямая, целиком лежащая на поверхности гиперболоида.

*Доказательство.* Запишем каноническое уравнение гиперболоида:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  Возьмём на гиперболоиде какую-нибудь точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и

проведём через неё прямую с направляющим вектором  $(q_1, q_2, q_3)$ . Её

параметрическое уравнение имеет вид  $x = x_0 + q_1t, y = y_0 + q_2t, z = z_0 + q_3t$ .

Потребуем, чтобы все точки этой прямой принадлежали гиперболоиду. Для этого при всех  $t$  должно быть выполнено равенство

$$\frac{(x_0 + q_1t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + q_2t)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + q_3t)^2}{c^2} = 1.$$

Так как  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ , то должны быть равны 0 коэффициенты при  $t$  и  $t^2$ , а

значит, должна выполняться система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x_0 q_1}{a^2} + \frac{y_0 q_2}{b^2} - \frac{z_0 q_3}{c^2} = 0, \\ \frac{q_1^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{b^2} - \frac{q_3^2}{c^2} = 0. \end{cases}$$

Положим  $q_3 = c$ . Тогда  $\frac{q_1^2}{a^2} + \frac{q_2^2}{b^2} = 1$ . Отсюда следует, что для некоторого угла



Ответ:  $F_1 = \left( \frac{\sqrt{10}}{3}; -\frac{\sqrt{10}}{3} \right), F_2 = \left( -\frac{\sqrt{10}}{3}; \frac{\sqrt{10}}{3} \right)$ .

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $35x^2 + 12xy + 30y^2 = 150$ .

Ответ:  $\pi\sqrt{6}$ .

5. а) Составить уравнение эллипса с фокусами  $(3; -1)$  и  $(3; 5)$ , касающегося оси ординат.

б) Составить уравнение гиперболы с вершиной  $(3; 6)$  и асимптотами  $y - 5 = \pm 2(x - 3)$ .

в) Составить уравнение параболы с фокусом  $(-3; 4)$  и директрисой  $x = 1$ .

Ответ: а)  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{18} = 1$ ; б)  $\frac{(x-3)^2}{0,25} - \frac{(y-5)^2}{1} = -1$ ; в)

$(y+1)^2 = -8(x+3)$ .

6. Составить уравнение параболы с вершиной  $(1; 1)$  и фокусом  $(0; 0)$ .

Ответ:  $(x-y)^2 = -8(x+y) + 16$ .

7. Установить вид поверхности второго порядка, приведя её уравнение к каноническому виду, и изобразить поверхность:

а)  $x^2 - z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$ ; б)  $9x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 18x = 0$ ; в)

$4x^2 - z^2 - 8x - 6y + 4 = 0$ ;

г)  $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ ; д)  $4x^2 - 4y^2 - z^2 + 8y + 2z - 4 = 0$ ; е)

$x^2 + z^2 = 6z$ .

Ответ: а)  $(x-1)^2 - (z+1)^2 = 1$  – гиперболический цилиндр; б)

$\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{y^2}{9/4} - \frac{z^2}{9/4} = 1$  – однополостный гиперболоид; в)

$y = \frac{(x-1)^2}{3/2} - \frac{z^2}{6}$  – гиперболический параболоид;

г)  $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$  – эллипсоид; д)  $4x^2 - 4(y-1)^2 - (z-1)^2 = -1$  –

двуполостный гиперболоид; е)  $x^2 + (z-3)^2 = 9$  – эллиптический цилиндр.

8. Доказать, что гиперболический параболоид состоит из прямых линий.