11. Механические волны

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве. Частицы среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются волной в поступательное движение, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия. В случае механических волн частицы среды совершают колебательные движения либо вдоль направления распространения волны (*продольная волна*), либо перпендикулярно направлению, вдоль которого распространяется волна (*поперечная волна*). В газовой среде звуковые волны всегда продольны. В кристаллах возможны как продольные, так и поперечные волны.

Фронтом волны называется геометрическое место точек, до которых дошла волна к определенному моменту времени. Иными словами, фронт волны представляет собой ту поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.

Фронт волны(как и определяемые ниже волновые поверхности) могут иметь разную форму. На расстояниях много больших, чем размер, например источника звуковых колебаний, фронт волны будет приближенно сферическим (*сферическая волна*). Очень далеко от источника волн небольшую часть фронта волны можно приближенно считать плоскостью (*плоская волна*).

Минимальное расстояние между точками волны, колеблющимися в одной фазе, называется *длиной волны* λ:

$$\lambda = VT, \tag{1}$$

где V – фазовая скорость волны, $T = 1/\nu$ – период колебания, $\nu = \omega/2\pi$ – частота, ω – круговая или циклическая частота. В случае механических для волны длины волны можно дать и другое определение: *длиной волны называется расстояние* λ*, на которое распространяется волна за время равное периоду* T *колебаний частиц среды*.

Если волна отражается от некоторого препятствия, и падающая волна накладывается на отраженную, то при определенных условиях образуются *стоячие* волны. Волна, распространяющаяся от источника на достаточно большое расстояние, называется *бегущей*. Бегущие волны в отличие от стоячих волн переносят энергию в пространстве.

Уравнения плоской и сферической волн

Уравнение плоской волны, в том случае, если колебания частиц носят гармонический характер, и волна распространяется в не поглощающей среде в положительном направлении оси X, имеет вид

$$\xi(x,t) = a\cos(\omega t - kx + \alpha), \tag{2}$$

где ξ – смещение частицы, имеющей координату x, от положения равновесия в момент времени t, a – амплитуда колебаний частицы, $(\omega t - kx + \alpha)$ – фаза волны, α – начальная фаза, $k = 2\pi/\lambda = \omega/\mathrm{V}$ – волновое число. Если ввести единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный фронту волны, то можно ввести волновой вектор $\vec{k} = k\vec{n}$.

Геометрическое место точек волны, колеблющихся в одной фазе, носит название *волновой поверхности*. Ясно, что волновых поверхностей бесконечное множество. У сферической волны эти поверхности представляют собой сферы, у плоской волны – плоскости.

У волны, распространяющейся в поглощающей энергию среде, амплитуда колебаний уменьшается по экспоненциальному закону: $a \cdot \exp(-\chi x)$. Соответственно уравнение плоской волны в этом случае имеет вид

$$\xi(x,t) = ae^{-\chi x}\cos(\omega t - kx + \alpha), \tag{3}$$

где $\chi = 1/l$ – коэффициент затухания, l – длина, на которой амплитуда волны уменьшается в e раз.

В случае сферической волны амплитуда волны уменьшается с расстоянием r от источника даже при отсутствии поглощения энергии средой, и уравнение волны имеет вид

$$\xi(\vec{r},t) = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \tag{4}$$

где a_0 – постоянная величина, численно равная амплитуде на расстоянии от источника, равном единице. Размерность a_0 равна размерности колеблющейся величины, умноженной на размерность длины.

Объяснить такое изменение амплитуды колебания частиц среды при распространении в ней сферической волны можно, например, следующим образом. Пусть на поверхности сферы радиуса r

находится N частиц. Это число пропорционально площади сферы, т.е. $N \sim r^2$. В разделе “Гармонические колебания” было показано, что полная энергия частицы U_1, совершающей гармонические колебания, пропорциональна квадрату амплитуды $U_1 \sim a^2$. Таким образом, полная энергия U частиц, лежащих на поверхности сферы радиуса r равна

$$U = NU_1 \sim r^2 a^2.$$

Так как среда не поглощающая, эта энергия не должна зависеть от радиуса сферической поверхности, т.е.

$$r^2 a^2 = const.$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{const'}{r} = \frac{a_0}{r}.$$

Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 z} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t}.$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси X, получаем одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} = \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 t}. \qquad (5)$$

Если уравнение, описывающее некоторый процесс, преобразуется к виду (5), то положительный коэффициент перед второй производной по времени от функции $\xi(x,t)$ равен $1/V^2$, где V – скорость распространения волны. Например, уравнение, описывающее распространение возмущений в газе, можно привести к виду (5). При этом коэффициент перед $\partial^2 \xi / \partial^2 t$, оказывается равным $\rho/\gamma P$, откуда следует, что скорость распространения волны в газовой среде равна

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}, \qquad (6)$$

где $\gamma = C_P / C_V$ – показатель адиабаты, P, T и M – давление, температура и молярная масса газа, ρ – его плотность, R – газовая постоянная.

Второй закон Ньютона записанный для небольшого объема твердой среды, в которой распространяется волна, можно привести в виду, представленному уравнением (5) и получить формулу для нахождения скорости распространения продольных волн

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (7)$$

и поперечных волн в упругой среде

$$V = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \qquad (8)$$

где E и G – модуль Юнга и модуль сдвига твердого тела, ρ – объемная плотность среды.

Энергетические соотношения для механических волн

Волна, распространяющаяся в упругой среде, переносит энергию от источника колебаний в различные точки пространства. Причем величина переносимой энергии может быть весьма значительной. Примером могут служить цунами, переносящие энергию из глубин океана к побережью, и создающие значительные разрушения.

Среднее значение плотности энергии волны дается соотношением

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \qquad (9)$$

Важной характеристикой волны является вектор плотности потока энергии волны – вектор Умова

$$\vec{j} = w\vec{\text{v}}.$$

При этом

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \vec{\text{v}}\,. \qquad (10)$$

Иногда модуль вектора $\langle \vec{j} \rangle$ называют *интенсивностью* волны. Полный поток энергии через некоторую поверхность S определяется выражением

$$\varPhi = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}.$$

Соответственно,

$$\langle \varPhi \rangle = \int_S \langle \vec{j} \rangle d\vec{S}. \qquad (11)$$

Стоячие волны

Если в среде распространяются одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении волн в отдельности. Очень важный случай наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. При определенных условиях в результате наложения волн может возникнуть *стоячая волна*.

Простейший пример стоячей волны – это волна, образующаяся на гитарной струне. В точках закрепления струны амплитуда колебаний частичек струны равна нулю. Эти точки струны называются *узлами* стоячей волны. Там, где амплитуда колебаний максимальна, там находятся *пучности* стоячей волны. Условием возникновения такой волны на струне с закрепленными концами является соотношение

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad \text{где} \quad n = 1,2,3\ldots, \qquad (12)$$

где l – длина струны. Если подставить сюда соотношения

$$\lambda = \frac{\text{v}}{\nu}, \qquad \text{v} = \sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{лин}}}}, \qquad (13)$$

где T – натяжение струны, $\rho_{\text{лин}}$ – линейная плотность струны, то получим

$$l = \frac{n}{2\nu}\sqrt{\frac{T}{\rho_{\text{лин}}}}. \qquad (14)$$

При $n = 1$ струна дает основной тон, $n = 2,3,\ldots.$ соответствует высшим гармоникам.

Сложение падающей и отраженной волн приводит к уравнению стоячей волны

$$\xi(x,t) = \left[2a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right]\cos\omega t. \qquad (15)$$

Модуль выражения, стоящего в квадратных скобках в формуле (15), есть амплитуда стоячей волны. Видно, что эта амплитуда периодически возрастает от значения $A = 0$ в узлах до значения $A = 2a$ в пучностях.