

Лекция 6

Теория вычетов

1. Вычет функции в изолированной особой точке

При вычислении различных интегралов большое применение имеет теория вычетов.

Определение 1. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной конечной особой точке z_0 называется число $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z)dz$, где γ – контур, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 и ориентированный против часовой стрелки. Вычет обозначается записью $\text{res}[f(z); z = z_0]$ или $\text{выч}[f(z); z = z_0]$, т.е.

$$\text{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z)dz. \quad (1)$$

Из формул для коэффициентов ряда Лорана в окрестности точки z_0 при $n = -1$ непосредственно следует, что

$$\text{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z)dz = c_{-1}, \quad (2)$$

т.е. вычет функции $f(z)$ в особой точке z_0 равен коэффициенту при минус первой степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

Отсюда следует, что в устранимой особой конечной точке вычет равен нулю.

Вычет в полюсе порядка n находится с помощью формулы:

$$\text{res}[f(z); z = z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)), \quad (3)$$

Эта формула получается после умножения ряда Лорана в окрестности полюса порядка n на $(z - z_0)^n$, $(n - 1)$ -кратного дифференцирования и перехода к пределу при $z \rightarrow z_0$. Для полюса первого порядка имеем

$$\operatorname{res}[f(z); z = z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (4)$$

Если в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является отношением двух аналитических в этой точке функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то формулу (4) можно заменить следующей:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z); z = z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)(z - z_0)}{\psi(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если z_0 – существенно особая точка, то вычет в этой точке находится как коэффициент c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$.

Вычет в бесконечно удаленной точке $z = \infty$.

Пусть $f(z)$ – аналитическая в некоторой окрестности точки $z = \infty$ ($|z| > R$), под вычетом функции в точке $z = \infty$ понимают число

$$\operatorname{res}[f(z); z = \infty] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz,$$

где γ^- – окружность достаточно большого радиуса, чтобы все конечные особые точки функции находились внутри γ^- , проходимая по часовой стрелке. Из этого определения следует, что

$$\operatorname{res}[f(z); z = \infty] = -c_{-1}, \quad (6)$$

где c_{-1} – коэффициент при z^{-1} в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$.

2. Основные теоремы о вычетах

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежащих в этой области.

Тогда справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k], \quad (7)$$

где Γ – контур, лежащий внутри области G и содержащий внутри себя точки $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Доказательство. Опишем вокруг каждой из точек z_k окружности $\gamma_k : |z - z_k| = \rho$ столь малого радиуса, чтобы круг $|z - z_k| \leq \rho$ содержался в G и каждая окружность γ_k лежала во внешности всех остальных (рис.1). Функция $f(z)$ аналитическая в области G_1 , получаемой из G удалением всех кругов $|z - z_k| \leq \rho$. В силу интегральной теоремы Коши для многосвязной области

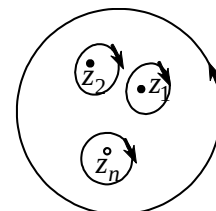


Рис 1.

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k^+} f(z) dz,$$

но

$$\oint_{\gamma_k^+} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}[f(z); z = z_k],$$

следовательно,

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k].$$

Теорема 2. Если функция $f(z)$ аналитическая на всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \infty$, то имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = 0.$$

Доказательство. Выберем контур Γ , охватывающий точки $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Тогда по теореме 1 получим, что

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = - \oint_{\Gamma^-} f(z)dz = \\ &= -2\pi i \operatorname{res}[f(z); z = \infty], \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z = z_k] = 0.$$

Примеры. Вычислить интегралы с помощью вычетов: 1. $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z^2 - 1};$

2. $\oint_{|z-1|=3} \frac{e^z dz}{z^2 - 1};$ 3. $\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4 - 1)(z + 2)}.$

Решение: 1) Точки $z_1 = -1, z_2 = 1$ – простые полюсы функции $f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$, из них только точка $z = 1$ попадает в область, ограниченную контуром, поэтому

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{(z^2 - 1)} = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{e^z}{z^2 - 1}; z = 1\right] = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^z}{2z}\right)_{z=1} = \pi i.$$

2) Обе особые точки $z_1 = -1, z_2 = 1$ попадают в область, ограниченную контуром, поэтому

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{e^z dz}{z^2 - 1} = 2\pi i \left(\operatorname{res} \left[\frac{e^z}{z^2 - 1}; z = -1 \right] + \operatorname{res} \left[\frac{e^z}{z^2 - 1}; z = 1 \right] \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \left(\frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right) = \frac{\pi i (e^2 - 1)}{e}.$$

3) Функция $f(z) = \frac{1}{(z^4 - 1)(z + 2)}$ имеет внутри контура $|z + 1| = \frac{3}{2}$ четыре особые точки $-2, -1, i$ и $-i$, а во внешности контура – только одну, именно 1. Сумма вычетов в особых точках внутри контура, в силу теоремы 2, отличается только знаком от суммы вычетов во внешности окружности $|z + 1| = 1,5$. Следовательно,

$$\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} f(z) dz = -2\pi i (\operatorname{res}[f(z); z = \infty] + \operatorname{res}[f(z); z = 1]).$$

Но вычет $f(z)$ в точке $z = \infty$ равен нулю, т.к. в разложении $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ нет степени с z^{-1} . Точка $z = 1$ – простой полюс, поэтому:

$$\operatorname{res}[f(z); z = 1] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)(z + 2)} = \frac{1}{12}.$$

В итоге получим

$$\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{(z^4 - 1)(z + 2)} = -2\pi i \left(0 + \frac{1}{12} \right) = -\frac{\pi i}{6}.$$

3. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов

Вычеты успешно применяются для вычисления определенных интегралов. Рассмотрим некоторые наиболее характерные случаи применения вычетов.

а) *Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$, где $R(u, v)$ – непрерывная*

рациональная функция. Для вычисления интеграла с помощью вычетов введем замену $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При изменении φ на промежутке $[0; 2\pi]$ точка z один раз обойдёт окружность радиусом 1 в положительном направлении. Заменяя по формулам Эйлера $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ и $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, преобразуем заданный интеграл к контурному интегралу

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \oint_{|z|=1} R_1(z) dz, \quad (8)$$

где

$$R_1(z) = \frac{1}{iz} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right).$$

Для вычисления последнего интеграла применима основная формула теории вычетов:

$$\oint_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[R_1(z); z = z_k]. \quad (9)$$

В формуле (9) учитываются только те особые точки z_k , для которых выполнено неравенство $|z_k| < 1$.

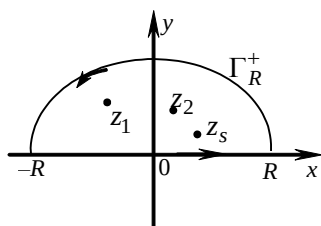


Рис 2.

б) Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где

$P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены степени m и n , причем $n \geq m + 2$, $Q_n(x) \neq 0$ на действительной оси. Для

вычисления интеграла с помощью вычетов введем функцию

$F(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$. Особые точки этой функции – это полюса – нули знаменателя, они

расположены внутри некоторого круга $|z| < R_0$, где R_0 – достаточно большое число.

Для применения теоремы о вычетах возьмем замкнутый контур C_R (рис.2), который

состоит из полуокружности $\Gamma_R^+ : |z| = R, \text{Im } z \geq 0$, где $R > R_0$, и отрезка

действительной оси $\Gamma_1 : -R \leq x \leq R$, $C_R = \Gamma_R^+ + \Gamma_1$. Если обозначить через $z_1, z_2, \dots, z_s$

все различные полюсы $F(z)$ в верхней полуплоскости, то получим

$$\oint_{C_R^+} F(z) dz = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{\Gamma_R^+} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{res}[F(z); z = z_k]. \quad (10)$$

Покажем, что при $R \rightarrow \infty$, предел $\int_{\Gamma_R^+} F(z) dz$ равен нулю. Так как степень

знаменателя $n \geq m + 2$, то функция $z^2 \cdot F(z)$ ограничена в некоторой окрестности точки $z = \infty$, т.е. $\exists M > 0, \forall z, |z| \geq R_1$, где $R_1 \geq R_0$:

$$|z^2 F(z)| \leq M \Rightarrow |F(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Поэтому при $R > R_1$ имеем:

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Переходя в равенстве (10) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} \left[\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right]. \quad (11)$$

Суммирование в (11) производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в верхней полуплоскости.

Замечание. При вычислении интегралов $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, где $F(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – четная функция, необходимо использовать равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx.$$

в) *Интегралы вида* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx$, $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx$, где $\alpha > 0$ – параметр. Эти интегралы (при условии, что они существуют) можно рассматривать как действительную и мнимую части комплекснозначного интеграла

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Для вычисления интеграла I_3 можно применить теорию вычетов к функции $F(z) = e^{i\alpha z} f(z)$ при условии, что справедлива лемма Жордана.

Лемма (Жордан). Пусть функция $f(z)$ непрерывна при $|z| \geq R_0 > 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $M_R = \max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где $\Gamma_R: |z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ – полуокружность; пусть $\alpha > 0$, тогда

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Оценим интеграл $\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz$. Параметризуем

полуокружность Γ_R : $z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, тогда

$$dz = i Re^{i\varphi} d\varphi, \quad |e^{i\alpha z}| = \left| e^{i\alpha R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \right| = e^{-\alpha R \sin\varphi},$$

поэтому

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| \leq M_R \cdot R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\varphi} d\varphi.$$

График функции $\sin\varphi$ на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ симметричен относительно прямой

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно, с учётом условия $\alpha > 0$ получим

$$\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin\varphi} d\varphi \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}).$$

Таким образом, при выполнении условий леммы получаем, что

$$\left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| \leq \frac{M_R \pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0,$$

при $R \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим интегралы вида

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx,$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n , причём $n \geq m+1$, а $Q_n(x) \neq 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$. В курсах математического анализа доказано, что в данных условиях интеграл I_3 сходится. Покажем, что его значение вычисляется по формуле

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} \left[e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right]. \quad (14)$$

Все особые точки подынтегральной функции $F(z) = e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ лежат внутри окружности достаточно большого радиуса R_0 . Как и в случае с доказательством формулы (11) для интеграла от рациональной функции рассмотрим контур C_R (см. рис.2), который состоит из полуокружности $\Gamma_R^+ : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$, где $R > R_0$, и отрезка действительной оси $\Gamma_1 : -R \leq x \leq R$, $C_R = \Gamma_R^+ + \Gamma_1$. По теореме 1 имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{C_R^+} e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz &= \int_{\Gamma_R^+} e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} dz + \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res} \left[e^{iaz} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}; z = z_k \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где суммирование производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в верхней полуплоскости. Функция $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ удовлетворяет лемме

Жордана, поэтому $\int_{\Gamma_R} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{iaz} dz \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, и переходя в (15) к пределу при

$R \rightarrow \infty$, получаем формулу (14). При этом интегралы $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \cos \alpha x dx$ и

$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \sin \alpha x dx$ вычисляются по формуле (12).

Замечание. Если $\alpha < 0$, можно использовать формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(x) dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k < 0} \text{res} \left[e^{i\alpha z} F(z); z = z_k \right],$$

где суммирование производится по всем особым точкам подынтегральной функции, лежащим в нижней полуплоскости.

В оптике часто применяются *интегралы Френеля* $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$. Для

вычисления этих интегралов можно применить теорию функций комплексной переменной, специально выбрав контур интегрирования.

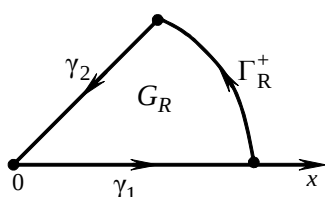


Рис. 3.

Выберем контур интегрирования $\Gamma = \gamma_1 + \Gamma_R^+ + \gamma_2$, как показано на рис.6.3: γ_1 – отрезок действительной оси

$0 \leq x \leq R$, $\Gamma_R^+ : z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ – дуга окружности

радиуса R , $\gamma_2 : 0 < r < R, \varphi = \frac{\pi}{4}$ – отрезок. Для вычисления интеграла введем

функцию $f(z) = e^{iz^2}$. В области G_R , ограниченной контуром Γ , функция $f(z)$ является аналитической и непрерывной на границе области, по интегральной теореме Коши $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$, откуда по свойству аддитивности интеграла можно

записать равенство

$$\int_0^R f(x) dx + \int_{\gamma_2^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz = 0. \quad (16)$$

Оценим интеграл по Γ_R^+ . При $z \in \Gamma_R^+$ получим $\left| e^{iz^2} \right| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \leq e^{-\frac{4R^2}{\pi} \varphi}$, т.к.

$\sin 2\varphi \geq \frac{4}{\pi} \varphi$ при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\left| \int_{\Gamma_R^+} f(z) dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-\frac{4R^2\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Для интеграла по γ_2 имеем: используем параметризацию $\gamma_2: z = t \cdot e^{\frac{\pi i}{4}}$, $0 \leq t \leq R$, $dz = e^{\frac{\pi i}{4}} dt$, тогда

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = e^{\frac{\pi i}{4}} R \int_0^1 e^{it^2 e^{\frac{\pi i}{2}}} dt = -e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt. \quad (17)$$

Перейдя в (16) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим с учётом (17):

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Известно, что $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Пуассона), поэтому в итоге

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Основная литература

1. И. В. Лавров, А. М. Терещенко. Теория функций комплексной переменной: Учеб. пособие / Министерство образования и науки РФ, Национальный исследовательский университет "МИЭТ". - 2-е изд. - М.: МИЭТ, 2015. - 168 с. - ISBN 978-5-7256-0788-8. 517.53(075.8) - Л-136 (стр. 94-109)

<http://emirs.miet.ru/oroks->

[miet/upload/normal1/00s8qsquc0tc4v/Lavrov_Tereschenko_TFKP_2015.pdf](http://emirs.miet.ru/oroks-miet/upload/normal1/00s8qsquc0tc4v/Lavrov_Tereschenko_TFKP_2015.pdf)

2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной [Текст]: Учебник для вузов / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова. - 6-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2010. - 336 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 5). - ISBN 978-5-9221-0133-2. 517.53(075.8) - С-245

Дополнительная литература

1. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов [Электронный ресурс] : Учеб. пособие / - СПб. : Лань, 2010. - 608 с. - Доступ к электронной версии книги открыт на сайте <http://e.lanbook.com/>. - ISBN 978-5- 8114-0906-8. ЭБС Лань (стр. 483-484)

2. Видео-лекция от проекта «Лекторий» по теме «Теория вычетов»
<http://lectoriy.mipt.ru/lecture/Maths-ComplexAnalys-L07-Karlov-131016.01>

3. Видео-лекция от проекта «Лекторий» по теме «Вычисление несобственных интегралов через вычеты. Многозначные функции»
<http://lectoriy.mipt.ru/lecture/Maths-ComplexAnalys-L08-Karlov-131023.02>